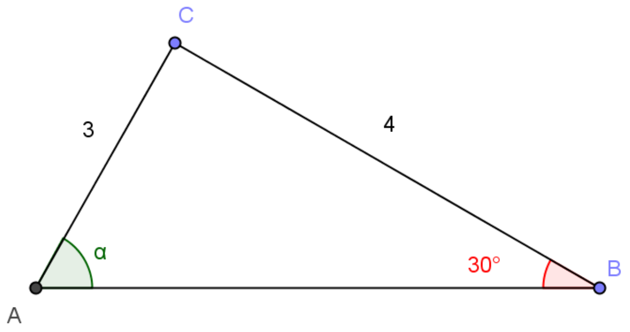
ORDINAMENTO 2014

QUESITO 1



Per il teorema dei seni risulta: $\frac{4}{sen\,\alpha}=\frac{3}{sen\,30°}$ da cui $sen\,\alpha=\frac{2}{3}$

Quindi $\alpha=arcsen\left(\frac{2}{3}\right)$ che porta alle due soluzioni:

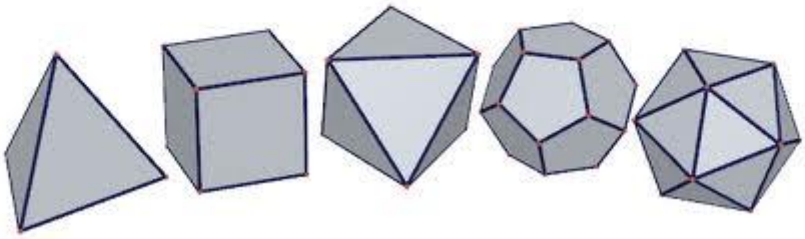
$\alpha_1\cong 41{,}810°\cong 41°49'$ $\alpha_2\cong 138°11'$

QUESITO 2

I poliedri regolari (**solidi platonici**) sono **5**, e tra essi **non ce ne sono a facce esagonali**.
Poiché in ogni vertice di un poliedro devono convergere almeno tre facce (non complanari), la somma dei loro angoli deve essere inferiore ad un angolo giro.
Le facce possono essere solo triangoli equilateri (**tetraedro, ottaedro, icosaedro**), quadrati (**esaedro o cubo**), pentagoni regolari (**dodecaedro**).
Con tre facce esagonali avremmo come somma almeno 120°x3=360°, quindi **non esiste un poliedro regolare a facce esagonali.**

Si hanno infatti le seguenti possibilità:

1. Le facce del poliedro sono triangoli (equilateri): le facce degli angoloidi possono essere 3 (3x60°=180°<360°), 4 (4x60°=240°<360°), 5 (5x60°=300°<360°), ma non di più: con 6 facce avremmo 6x60°=360° che non è minore di 360°.
   Abbiamo quindi tre poliedri regolari con le facce triangolari: **il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro.**
2. Se le facce del poliedro sono quadrate, le facce degli angoloidi non possono essere più di 3 (3x90°=270°, ma 4x90°=360°): in questo caso si ha l'**esaedro (il cubo).**
3. Se le facce del poliedro sono pentagoni (regolari), ogni angoloide può avere al massimo 3 facce (3x108°=324°): in questo caso si ha il **dodecaedro regolare.**
4. Non possono esistere poliedri regolari le cui facce abbiamo più di 5 lati (per esempio già con l'esagono avremmo 3x120°=360°).



QUESITO 3

Consideriamo la seguente potenza del binomio $(\boldsymbol{2a^2 - 3b^3})^{\boldsymbol{n}}$**.**

Si chiede **di trovare il valore di n** sapendo che nello sviluppo del binomio compare il termine $\boldsymbol{-1080a^4b^9}$**.**

Risulta:

$$(\boldsymbol{2a^2 - 3b^3})^{\boldsymbol{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2a^2)^k (-3b^3)^{n-k}$$

Il termine in $\boldsymbol{a^4b^9}$ si ottiene se 2k=4 e 3n-3k=9, da cui **k=2 e n=5**; il coefficiente di $\boldsymbol{a^4b^9}$ è dato da: $\binom{5}{2} \cdot 2^2 \cdot (-3)^3 = 10 \cdot 4 \cdot (-27) = -1080$

QUESITO 4

Il solido in questione può essere visto come somma di infiniti rettangoli di dimensioni f(x) ed h(x), quindi il suo volume si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$V = \int_{-2}^{-1} f(x)h(x)dx = \int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx = -\left[\int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx\right] =$$

$$= -\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_{-2}^{-1} = -\left(e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e} \cong \ 0.239\ u^3$$

QUESITO 5

Dei numeri 1,2,3, …., 6000 quanti NON sono divisibili né per 2, né per 3 né per 5?

PRIMO METODO

Il problema è facilmente risolvibile mediante il seguente algoritmo:

Consideriamo il generico numero intero i da 1 a 6000:

se i non è divisibile per 2 (restano 3000 numeri) allora:
    se i non è divisibile per 3 (se ne tolgono 3000:3=1000 e ne restano 2000) allora:
        se i non è divisibile per 5 (se ne tolgono 2000:5=400, ne restano 2000-400=1600)

Quindi *dei numeri 1,2,3, …., 6000 quelli NON sono divisibili né per 2, né per 3 né per 5 sono **1600.***

Abbiamo tradotto l'algoritmo nel seguente programma in **Pascal**, che può essere provato on line al seguente indirizzo: http://www.compileonline.com/compile_pascal_online.php

```
(*quesito 5 maturità ordinamento 2014*)
Program divisori;
var i,cont:integer;
begin
 cont:=0;
 For i:=1 to 6000 do
  begin
   if (i mod 2 <>0) then
    if (i mod 3 <>0) then
     if (i mod 5 <>0) then
      cont:=cont+1
  end;
writeln('I numeri da 1 a 6000 che non sono divisibili');
writeln('nè per 2, nè per 3, nè per 5 sono: ', cont);
end.
```

SECONDO METODO

Consideriamo il seguente diagramma di Eulero-Venn in cui indichiamo con U l'insieme di tutti i numeri da 1 a 6000, con D il sottoinsieme di U formato dai numeri divisibili per 2, con T i divisibili per 3 e con C i divisibili per 5; DC: divisibili per 2 e 5, CT: divisibili per 3 e per 5, DT: divisibili per 2 e 3; DCT: divisibili per 2, 3 e 5.

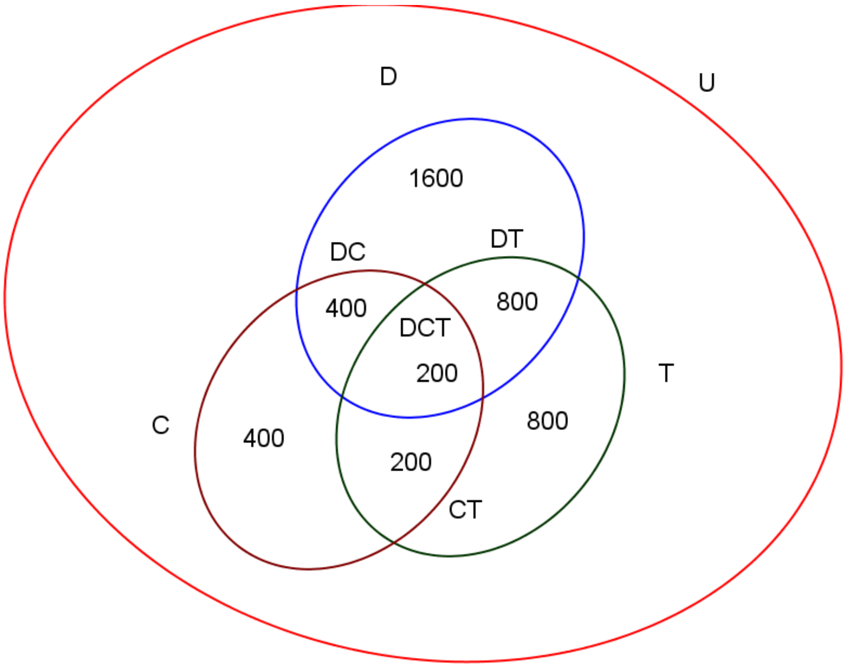
L'insieme dei numeri che non sono divisibili né per 2 né per 3 né per 5 è il complementare di $D \cup T \cup C$.

Gli insiemi indicati hanno il seguente numero di elementi:
U: 6000
D: 6000/2=3000
T=6000/3=2000
C=6000/5=1200
DC: divisori di 2 e 5 cioè di 10= 6000/10=600
DT: divisori di 2 e 3 cioè di 6= 6000/6=1000
CT: divisori di 5 e 3 cioè di 15= 6000/15=400
DCT: divisori di 2,3 e 5 cioè di 30= 6000/30=200
DC-DCT: 600-200= 400
DT-DCT: 1000-200= 800
CT-DCT: 400-200=200

Divisori solo di 2: 3000-1400=1600
Divisori solo di 3: 2000-1200=800
Divisori solo di 5: 1200-800=400

Quindi i numeri da 1 a 6000 che non sono divisibili né per 2 né per 3 né per 5 sono:

6000 – (1600+400+200+800 + 800 + 200 + 400)= **1600**



QUESITO 6

Un'azienda commercializza il suo prodotto in lattine da 5 litri a forma di parallelepipedo a base quadrata. Le lattine hanno dimensioni tali da richiedere la minima quantità di latta per realizzarle. Quali sono le dimensioni, arrotondate ai mm, di una lattina?

Si tratta di trovare la minima superficie totale di parallelepipedo a base quadrata di dato volume.

Il volume del cubo è: $V = 5\,litri = 5\,dm^3$.
Indicando con a il lato del quadrato di base e con h l'altezza del parallelepipedo, si ha:

$V = a^2 \cdot h = 5$ e $S(totale) = (2a^2 + 2ah + 2ah) = 2 \cdot (a^2 + 2ah)$

Ponendo a=x (con x>0) risulta $h = \frac{5}{x^2}$, quindi: $S(totale) = 2 \cdot \left(x^2 + \frac{10}{x}\right)$
La superficie totale è minima quando lo è: $y = \left(x^2 + \frac{10}{x}\right)$
$y' = 2x - \frac{10}{x^2} \geq 0$ se $x^3 - 5 \geq 0$ $cioè\ per\ x \geq \sqrt[3]{5}$;
$y' < 0\ per\ 0 < x < \sqrt[3]{5}$

y, e quindi anche la superficie totale, è minima per $x = \sqrt[3]{5}$; per tale valore di x si ottiene $h = \frac{5}{x^2} = \sqrt[3]{5}$ (SI TRATTA QUINDI DI UN CUBO).

Quindi le dimensioni della lattina di superficie totale minima sono:

$lato\ di\ base = altezza = \sqrt[3]{5}\ dm = 171\ mm$

QUESITO 7

$f(x) = x^3$, intervallo [0;k], valor medio = 9; k = ?

Per il teorema della media il valore medio è dato da:

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_0^k x^3\ dx = \frac{1}{k}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^k = \frac{k^3}{4} = 9 \implies k^3 = 36 \implies k = \sqrt[3]{36}$$

QUESITO 8

Un polinomio di quarto grado è del tipo:

$$\boldsymbol{P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$$

Essendo una funzione continua e derivabile su tutto l'asse reale, è necessario che la derivata prima si annulli in x=2 e x=3.

$$P'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Le condizioni richieste portano al seguente sistema:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(2) = 3 \\ P(3) = 3 \\ P'(2) = 0 \\ P'(3) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ 16a + 8b + 4c + 2d + e = 3 \\ 81a + 27b + 9c + 3d + e = 3 \\ 32a + 12b + 4c + d = 0 \\ 108a + 27b + 6c + d = 0 \end{cases}$$

………..

$a = -\frac{3}{4}, \quad b = \frac{15}{2}, \quad c = -\frac{111}{4}, \quad d = 45, \quad e = -24$

$$\boldsymbol{P(4)} = 256a + 64b + 16c + 4d + e = -192 + 480 - 444 + 180 - 24 = 0$$

QUESITO 9

$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{3 - log_2(x+5)}}$

Dominio della funzione:

$$\begin{cases} x+5>0 \\ 3-log_2(x+5) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-5 \\ log_2(x+5) \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-5 \\ (x+5) \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-5 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

Quindi il dominio della funzione è: $\boldsymbol{-5 < x \leq 3}$

QUESITO 10

Si chiede di risolvere la seguente equazione:

$$\left(\frac{1}{5}(x^2-10x+26)\right)^{x^2-6x+1} = 1$$

Condizioni di esistenza:

$$x^2-10x+26>0 \quad \cup \quad \begin{cases} x^2-10x+26=0 \\ x^2-6x+1>0 \end{cases}$$

$$\Delta < 0, verificata\ \forall x \quad \cup \quad \begin{cases} \nexists\ x \\ x^2-6x+1>0 \end{cases}$$

Quindi l'equazione ha senso per ogni x reale. Riscriviamola così:

$$\left(\frac{1}{5}(x^2-10x+26)\right)^{x^2-6x+1} = \left(\frac{1}{5}(x^2-10x+26)\right)^{0}$$

$x^2-6x+1=0 \qquad x = 3 \pm \sqrt{8} = 3 \pm 2\sqrt{2}$

oppure

$$\frac{1}{5}(x^2-10x+26)=1 \Rightarrow x^2-10x+21=0 \Rightarrow x=3, \quad x=7$$

Secondo metodo

Dopo aver notato che $\frac{1}{5}(x^2 - 10x + 26) > 0 \quad \forall\, x$, l'equazione può essere scritta nella forma:

$$e^{ln\left(\frac{1}{5}(x^2-10x+26)\right)^{x^2-6x+1}} = e^0 \quad \Longrightarrow \quad e^{(x^2-6x+1)\, ln\left(\frac{1}{5}(x^2-10x+26)\right)} = e^0$$

da cui: $\quad x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 3 \pm \sqrt{8} = 3 \pm 2\sqrt{2}$

oppure: $\quad ln\left(\frac{1}{5}(x^2 - 10x + 26)\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{5}(x^2 - 10x + 26) = 1 \quad \Longrightarrow$

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 3, \qquad x = 7$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri