LICEO SCIENTIFICO 2024 - PROBLEMA 1

Si consideri $f_{a,b}(x) = \frac{ax^3+b}{x^2}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinare i valori dei parametri in modo che la retta t, di equazione $7x + y - 12 = 0$, sia tangente al grafico di $f_{a,b}(x)$ nel suo punto P di ascissa $x = 1$.

Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$ e $b = 4$.

b) Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$ e tracciarne il grafico γ. Scrivere l'equazione dell'ulteriore retta tangente alla curva γ passante per P.

c) Al variare del parametro reale m, determinare il numero di intersezioni tra la retta di equazione $y - 5 = m(x - 1)$ e la curva γ.

d) Sia $S(k)$, con $k > \frac{3}{2}$, l'area della regione finita di piano compresa tra la curva γ, il suo asintoto obliquo, la retta t e la retta di equazione $x = k$. Calcolare il $\lim_{k\to+\infty} S(k)$, fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

a)

Determinare i valori dei parametri in modo che la retta t, di equazione $7x + y - 12 = 0$, sia tangente al grafico di $f_{a,b}(x)$ nel suo punto P di ascissa $x = 1$.

$$y = f_{a,b}(x) = \frac{ax^3 + b}{x^2}, \qquad a, b \in \mathbb{R} \qquad\qquad t:\ 7x + y - 12 = 0$$

$$y' = \frac{3ax^2(x^2) - (ax^3 + b)\,2x}{x^4} = \frac{ax^4 - 2bx}{x^4}, \quad m_t = -7 \ \Rightarrow f'(1) = -7, \quad a - 2b = -7$$

Se $x = 1$ $f(1) = a + b$.
Sostituendo $x = 1$ nell'equazione della retta t (tangente al grafico di f nel punto di ascissa 1) si ottiene

$y = 5$. Quindi il punto di tangenza è $P = (1; 5)$. Ma P è anche un punto del grafico di f quindi

$f(1) = a + b = 5$. Per trovare a e b dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema:

$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - 2b = -7 \end{cases}$: si ottiene facilmente $\boldsymbol{a = 1}$ ***e*** $\boldsymbol{b = 4}$.

Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$ e $b = 4$.

b)

Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$ e tracciarne il grafico γ. Scrivere l'equazione dell'ulteriore retta tangente alla curva γ passante per P.

Dominio: $x \neq 0$: $-\infty < x < 0 \ \cup \ 0 < x < +\infty$

Simmetrie notevoli (pari/dispari):

$$f(-x) = \frac{-x^3+4}{x^2} \ ed\ è\ f(-x) \neq f(x): NO\ PARI \quad ed\ \ f(-x) \neq -f(x): \ NO\ DISPARI$$

Non c'è quindi simmetria rispetto all'asse y né rispetto all'origine.

Eventuali intersezioni con glia assi cartesiani

Se $x = 0$: $la\ funzione\ non\ esiste$. Non c'è intersezione con l'asse y.
Se $y = 0$, $\frac{x^3+4}{x^2} = 0$, $x = -\sqrt[3]{4}$: il grafico passa per $\left(-\sqrt[3]{4}\,, 0\right)$

Segno della funzione:

$$f(x) > 0\ se\ \ \frac{x^3+4}{x^2} > 0:\ x > -\sqrt[3]{4}\ \ con\ \ x \neq 0$$

Calcolo dei limiti alla frontiera del dominio

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$: non ci sono asintoti orizzontali, eventuale asintoto obliquo (che c'è, essendo la funzione razionale fratta con il grado del numeratore che supera di 1 il grado del denominatore)

$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{x^3+4}{x^2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$: $x = 0\ asintoto\ verticale\ destro\ e\ sinistro$.

Asintoti

Abbiamo già detto che non ci sono asintoti orizzontali, che c'è l'asintoto verticale $x = 0$ e che ci sarà un asintoto obliquo. Cerchiamone l'equazione. La funzione può essere scritta nella forma:

$$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2} = mx + q + g(x)\ con\ g(x) infinitesimo\ per\ x \to \pm\infty.$$

Quindi l'asintoto obliquo ha equazione $y = x$.

(Si veda il seguente approfondimento sugli asintoti: https://www.matefilia.it/argomen/asintoti/asintoti.htm)

Allo stesso risultato si può arrivare calcolando i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1=m\,,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3+4}{x^2}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{4}{x^2}\right]=0=q$$

Studio della derivata prima

Sfruttando il calcolo gà fatto nel punto a) abbiamo:

$$y'=\frac{ax^4-2bx}{x^4}=\frac{x^4-8x}{x^4}=\frac{x^3-8}{x^3}=y'$$

$y'>0$: $x^3>8\ per\ x>2$, $x^3>0\ per\ x>0\ quindi\ \frac{x^3-8}{x^3}>0\ \ se\ x<0\ \ vel\ \ x>2$

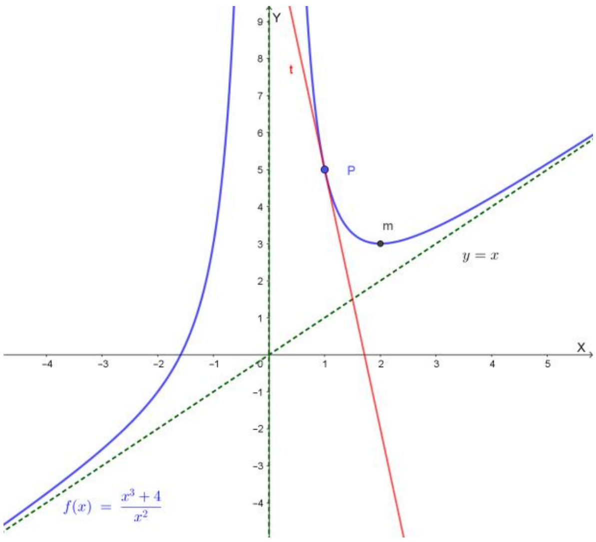
La funzione è quindi crescente per $x<0\ \ vel\ \ x>2$, decrescente per $0<x<2$ ed ha un minimo relativo per x=2 (di ordinata $f(2)=3$): minimo relativo $m=(2;3)$.

Studio della derivata seconda

$$y'=\frac{x^3-8}{x^3}=1-\frac{8}{x^3}\,,\qquad quindi:\ y''=\frac{24}{x^2}>0\ \ \forall x\in\ dominio:$$

il grafico volge quindi sempre la concavità verso l'alto (non ci sono flessi).

Grafico γ



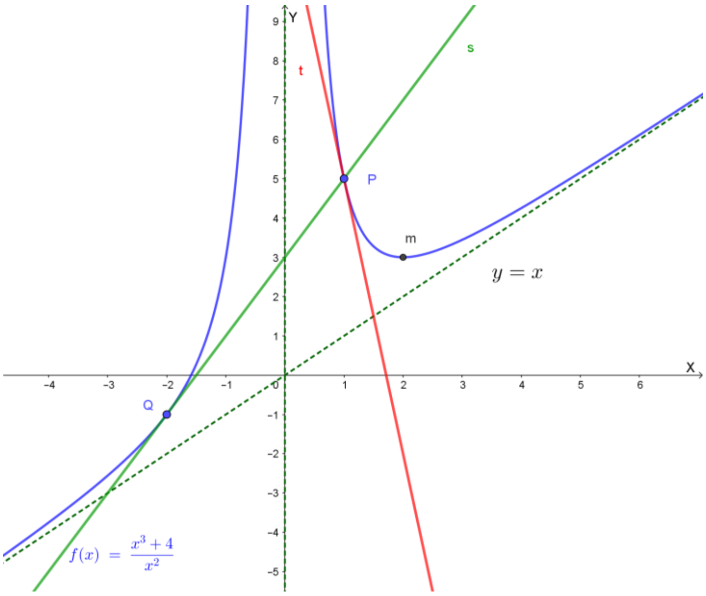
Cerchiamo ora l'ulteriore tangente al grafico passante per P(1; 5).

Generica retta per P: $y-5=m(x-1)$, $y=mx+5-m$

$\begin{cases} f(x)=mx+5-m \\ f'(x)=m \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x^3+4}{x^2}=mx+5-m \\ \frac{x^3-8}{x^3}=m \end{cases}$; sostituendo $\frac{x^3-8}{x^3}=m$ nella prima equazione ed eseguendo i calcoli si ottiene: $x^3-3x+2=0\ \ (con\ x\neq 0)$; scomponendo con la regola di Ruffini (sappiamo che $x=1$ è una radice) abbiamo: $(x-1)(x^2+x-2)=0$, $(x-1)(x-1)(x+2)=0$:

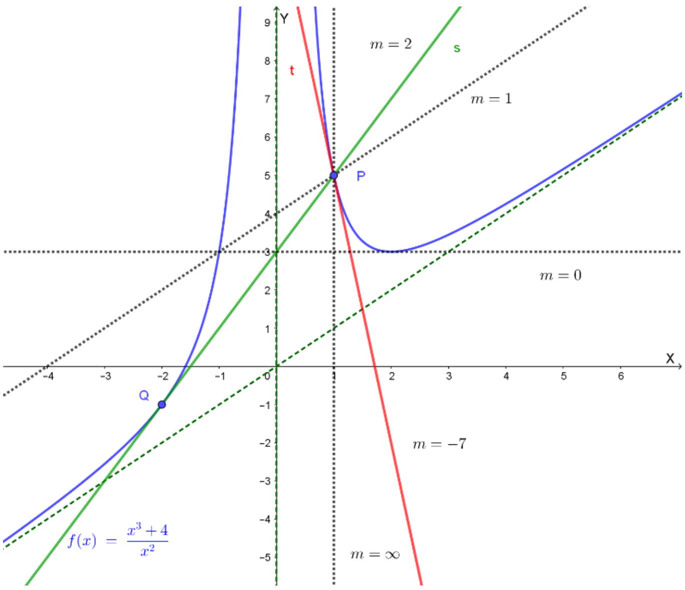
Le soluzioni sono:
$x = 1$ (*che corrisponde al punto P già noto*) e $x = -2$, che è l'ascissa dell'ulteriore punto di tangenza Q delle rette uscenti da P. Essendo $f(-2) = -1$ *si ha* $Q = (-2;\ -1)$.
Essendo $\frac{x^3-8}{x^3} = m$, con $x = -2$ si ottiene: m =2.
Siccome $y = mx + 5 - m$:

l'equazione dell'ulteriore tangente s a γ passante per P ha equazione: $y = 2x + 3$.



c)

Al variare del parametro reale m, determinare il numero di intersezioni tra la retta di equazione $y - 5 = m(x - 1)$ e la curva γ.

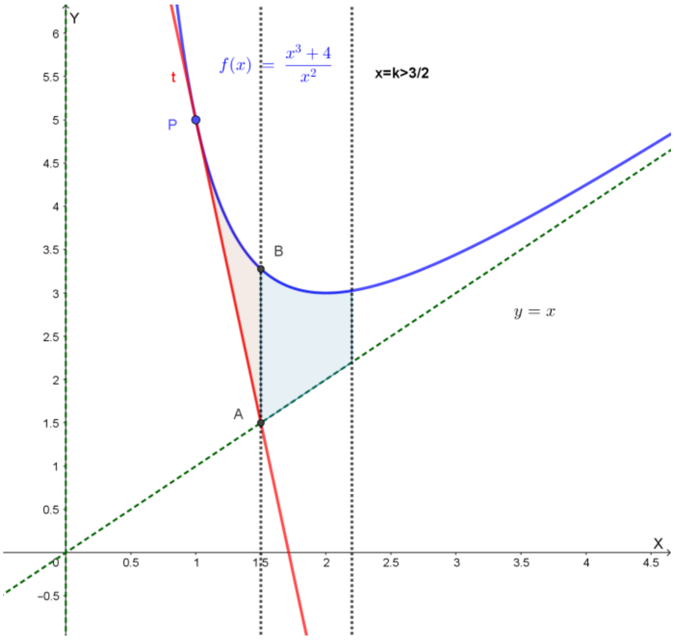


Osservando il grafico a fianco, dove abbiamo tracciato le rette caratteristiche ai fini della discussione richiesta, si ha:

- Se $-\infty < m < -7$: 3 *intersezioni*
- Se $m = -7$: 3 intersezioni di cui 2 coincidenti.
- Se $-7 < m < 1$: 3 *intersezioni*
- Se $m = 1$: 2 *intersezioni*
- Se $1 < m < 2$: 3 *intersezioni*
- Se $m = 2$: 3 intersezioni di cui due coincidenti
- Se $2 < m < +\infty$: 1 intersezione.

d)

Sia $S(k)$, con $k > \frac{3}{2}$, l'area della regione finita di piano compresa tra la curva γ, il suo asintoto obliquo, la retta t e la retta di equazione $x = k$. Calcolare il $\lim_{k\to+\infty} S(k)$, fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.



Osserviamo che per $k = \frac{3}{2}$ la retta $x = k$ passa per $A = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$, intersezione tra t e l'asintoto obliquo. L'area richiesta si deve quindi calcolare mediante la somma di due integrali:

$$S(k) = \int_1^{\frac{3}{2}} \left(\frac{x^3+4}{x^2} - (-7x+12)\right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^{k} \left(\frac{x^3+4}{x^2} - (x)\right) dx =$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \left(x + \frac{4}{x^2} + 7x - 12\right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^{k} \left(x + \frac{4}{x^2} - x\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{x} + \frac{7}{2}x^2 - 12x\right]_1^{\frac{3}{2}} + \left[-\frac{4}{x}\right]_{\frac{3}{2}}^{k} = \cdots = \frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{k} + \frac{8}{3}\right) = 3 - \frac{4}{k} = S(k)$$

Calcoliamo il limite richiesto:

$$\lim_{k\to+\infty} S(k) = \lim_{k\to+\infty} \left(3 - \frac{4}{k}\right) = 3$$

Il risultato di questo limite rappresenta l'area della regione aperta delimitata dal grafico γ, dalla retta t e dall'asintoto obliquo di γ.

Giuseppe Scoleri, con la collaborazione di Angela Santamaria