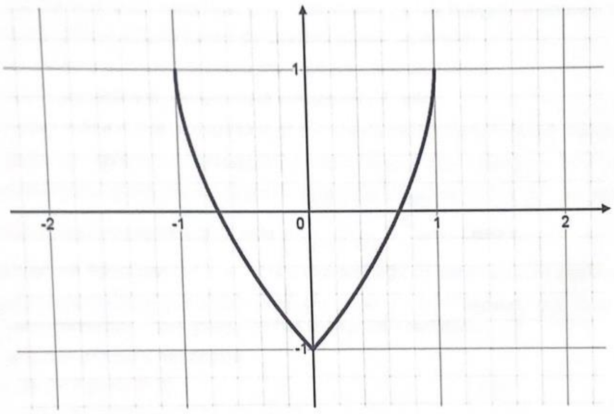
LICEO SCIENTIFICO 2024 - PROBLEMA 2

«All'inizio e alla fine, abbiamo il mistero. [...] A questo mistero la matematica ci avvicina, pur senza penetrarlo». (E. De Giorgi)

Si consideri la famiglia di funzioni $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$, con $n \in N$, $n > 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$.

a) Verificare che, qualunque sia il valore di n, la funzione f_n non è derivabile nel punto di ascissa $x = 0$. Determinare il valore di n in corrispondenza del quale il grafico di f_n presenta un punto angoloso. Per opportuni valori dei parametri a, b, il grafico α, in figura, rappresenta la funzione $f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$. Determinare i parametri a e b, considerando che f_2 è definita in $[-1; 1]$ e che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.



Si ponga, d'ora in avanti, $a = -1$, $b = 0$.

b) Studiare la funzione $g(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2}$, verificando che non è derivabile negli estremi del dominio e nel punto di ascissa $x = 0$. Indicare con β il suo grafico e tracciare la curva $\gamma = \alpha \cup \beta$.

c) La retta r, di equazione $x = k$, con $-1 < k < 1$, interseca γ nei punti P e Q. Dimostrare che la misura del segmento PQ è massima quando r è asse di simmetria di γ.

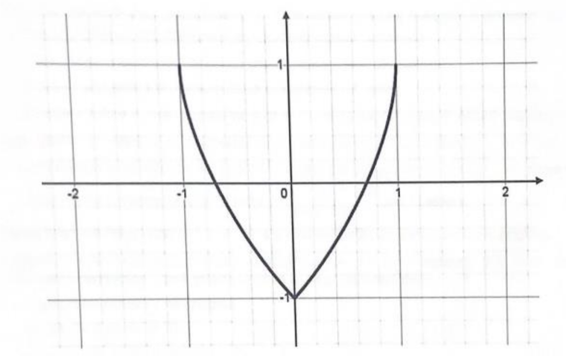
d) Verificare che la funzione $H(x) = \frac{1}{2}\left(arcsen(x) + x\sqrt{1 - x^2}\right)$ è una primitiva della funzione $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Con il metodo che si ritiene più opportuno, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da γ.

«Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere belle: le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è posto perenne per la matematica brutta». (G. H. Hardy)

a)

Si consideri la famiglia di funzioni $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$, con $n \in N$, $n > 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$.

a) Verificare che, qualunque sia il valore di n, la funzione f_n non è derivabile nel punto di ascissa $x = 0$. Determinare il valore di n in corrispondenza del quale il grafico di f_n presenta un punto angoloso. Per opportuni valori dei parametri a, b, il grafico α, in figura, rappresenta la funzione $f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$. Determinare i parametri a e b, considerando che f_2 è definita in $[-1; 1]$ e che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.



$f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2+bx+1}$, con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$

- Verifichiamo che $\forall$ valore di n la funzione f_n non è derivabile nel punto di ascissa $x=0$
- Osserviamo che $ax^2+bx+1 \geq 0$ in un intervallo del tipo $x_1 \leq x \leq x_2$ essendo $\Delta = b^2 - 4a > 0$ (a è < 0)

Analizziamo la funzione $y = \sqrt[n]{x^2}$, dove $n = 2, 3, 4, \dots$

- Se $n = 2$ $\sqrt[n]{x^2} = \sqrt{x^2} = |x|$ che non è derivabile in $x=0$ che è punto angoloso
- Se $n > 2$ $y = \sqrt[n]{x^2} = x^{\frac{2}{n}}$ e $\frac{2}{n} < 1$

quindi $y' = \frac{2}{n} \cdot x^{\frac{2}{n}-1} = \dfrac{2}{n\,x^{1-\frac{2}{n}}}$

Con $1 - \frac{2}{n} > 0$ quindi $y' \nexists$ in $x = 0$

La funzione $y = \sqrt{ax^2+bx+1}$ è invece sempre derivabile in $x = 0$, essendo:

$$y' = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}} \quad \text{e} \quad y'(0) = \frac{b}{2}$$

Pertanto la funzione non è mai derivabile per $x=0$ e presenta un punto angoloso per $n=2$

$f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2+bx+1}$ (col grafico sopra riportato). Dobbiamo trovare a e b sapendo che f_2 è definita in $[-1;1]$ e che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Affinché risulti $f(-x) = f(x)$ deve chiaramente essere $\boxed{b=0}$, quindi:

$$f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2+1}$$

Affinché il dominio sia $[-1;1]$ deve essere $ax^2+1 \geq 0$ in tale intervallo e ciò avviene $\boxed{\text{se } a=-1}$ ($-x^2+1 \geq 0$ per $-1 \leq x \leq 1$)

La funzione richiesta è:

$$f_2(x) = |x| - \sqrt{1-x^2} \quad (\text{grafico } \alpha)$$

Si ponga, d'ora in avanti, $a = -1$, $b = 0$.

b)

Studiare la funzione $g(x) = |x| + \sqrt{1-x^2}$, verificando che non è derivabile negli estremi del dominio e nel punto di ascissa $x = 0$. Indicare con β il suo grafico e tracciare la curva $\gamma = \alpha \cup \beta$.

Studiamo la funzione $g(x) = |x| + \sqrt{1-x^2}$

- Dominio: $-1 \leq x \leq 1$
- Se $x=0$, $y=+1$ e se $y=0$:

$|x|+\sqrt{1-x^2}=0 \Rightarrow$ MAI

- Segno della funzione:

$|x|+\sqrt{1-x^2}\geq 0 \quad \forall x$

- La funzione è definita e continua nel dominio $[-1; 1]$ quindi NON OCCORRE calcolare limiti e non ci sono asintoti.
- Studio derivata prima:

$y=|x|+\sqrt{1-x^2}$

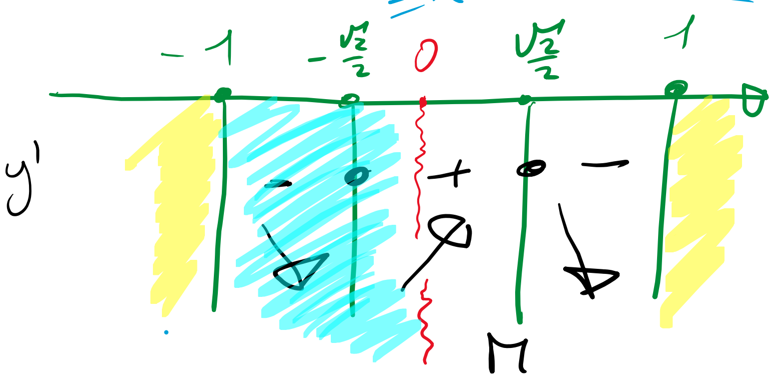
È sufficiente studiare la funzione per $x\geq 0$, data la simmetria rispetto all'asse y.

Se $x>0 \quad y = x+\sqrt{1-x^2}$

$y' = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$y'\geq 0 \quad \sqrt{1-x^2}\geq x \Rightarrow (x>0)$

$1-x^2\geq x^2 \Rightarrow 2x^2\leq 1 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$



max relativo per $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$
(e per la simmetria anche per $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$)

$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$

- Notiamo che $f'_+(0)=1$ ed $f'_-(0)=-1$ ($x=0$ non derivabile)
- Verifichiamo che la funzione non è derivabile in $x=\pm 1$:

$y'=\pm 1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ che è derivabile solo per $-1<x<1$ (con $x\neq 0$)

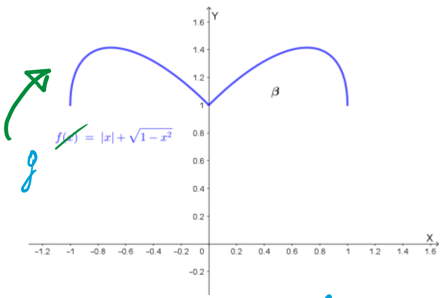
- Studio della derivata seconda:

$$y'=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

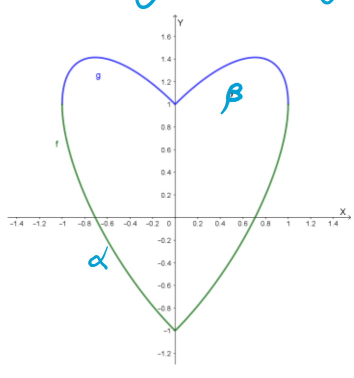
$$y''=\dots=\frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}<0 \quad \forall x$$

Il grafico β ha sempre la concavità verso il basso (NO flessi).

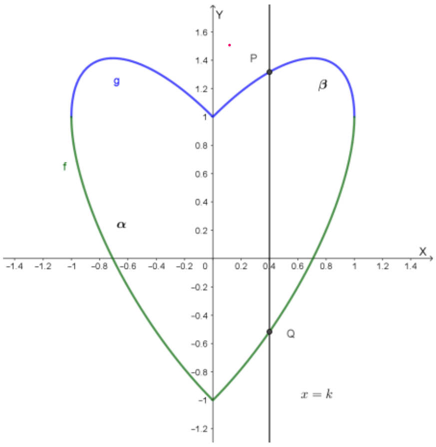
Grafico di β



$\gamma=\alpha\cup\beta$ ha il seguente grafico:



c)



$x = k$ con $-1 < k < 1$

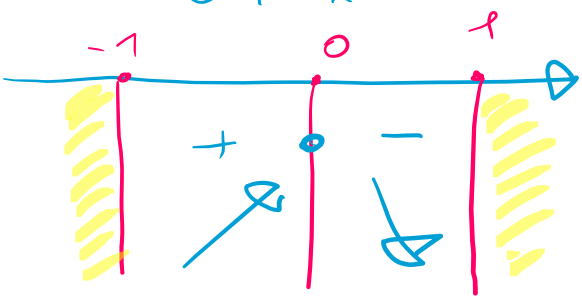
Determiniamo il massimo di $\overline{PQ}$

$\overline{PQ} = y_P - y_Q =$

$= |x| + \sqrt{1-x^2} - |x| + \sqrt{1-x^2} =$

$= 2\sqrt{1-x^2} = y$

$y' = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0$ se $x \leq 0$ (in $(-1;1)$)



Quindi $\overline{PQ}$ è massimo se $x = 0$.

Quindi $\overline{PQ}$ è massimo quando P e Q appartengono all'asse di simmetria.

d)

Verificare che la funzione $H(x) = \frac{1}{2}\left(arcsen(x) + x\sqrt{1-x^2}\right)$ è una primitiva della funzione $h(x) = \sqrt{1-x^2}$. Con il metodo che si ritiene più opportuno, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da γ.

Dimostriamo che $H'(x) = h(x)$ (con $-1 < x < 1$)

$$H'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + x\,\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1 + 1 - x^2 - x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{\cancel{(1-x^2)}\sqrt{1-x^2}}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}\,\cancel{\sqrt{1-x^2}}} = \sqrt{1-x^2} = h(x)$$

(N.B. $-1 < x < 1$; $h(x)$ è continua in $[-1;1]$)

- Calcoliamo l'area della regione finita delimitata da γ:

$$\mathcal{A} = 2\int_0^1 [g(x) - f(x)]\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$= 4\int_0^1 h(x)\,dx = 4\Big[H(x)\Big]_0^1 =$$

$$= 4\left[\frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right)\right]_0^1 =$$

$$= 2\left[\arcsin(1) + 0 - (\arcsin 0 + 0)\right] =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\pi = \mathcal{A}_\gamma}$$

N.B. Per applicare il "teorema fondamentale del calcolo integrale" all'intervallo $[0;1]$ notiamo che l'area andrebbe calcolata così:

$$\mathcal{A} = \lim_{K\to 1^-}\left\{2\int_0^K [g(x) - f(x)]\,dx\right\}$$

ma si ottiene il risultato già trovato.

Giuseppe Scoleri, con la collaborazione di Angela Santamaria