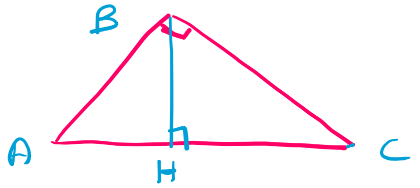
LICEO SCIENTIFICO 2024 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

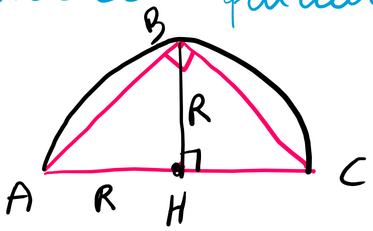
È dato un triangolo ABC, rettangolo in B. Dimostrare che tale triangolo è isoscele se e solo se l'altezza BH relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.



1) Hp: $BH \cong \frac{1}{2} AC$ Th: $AB \cong BC$

Il triangolo $A\hat{B}C$ è inscrittibile nella semicirconferenza di diametro AC e passante per B. Se $BH \cong \frac{1}{2} AC$ allora $\overline{BH} = R$ (R raggio della semicirc.)

Abbiamo quindi la seguente figura:



Perciò $B\hat{A}C = A\hat{C}B = 45°$

Pertanto $AB \cong BC$

2) $AB \cong BC \Longrightarrow BH \cong \frac{1}{2} AC$

Ma se $AB \cong BC \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = \frac{180° - 90°}{2} = 45°$

Perciò $A\hat{B}C$ è metà di un quadrato con diagonale AC ed essendo $BH \perp AC$ risulta BH metà diagonale, perciò $BH \cong \frac{1}{2} AC$

QUESITO 2

Si lancia 5 volte una moneta truccata che dà testa con probabilità p.

- Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte?
- Per quale valore di p la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte è massima?

a) Si tratta di un problema di prove ripetute (probabilità binomiale), quindi:

p, $n=5$, $k=2$, $q=1-p$

$$p(\text{2 teste in 5 lanci}) = \binom{5}{2} p^2 q^3 =$$
$$= \boxed{10\,p^2(1-p)^3}$$

b) Cerchiamo il massimo di $y = 10p^2(1-p)^3$

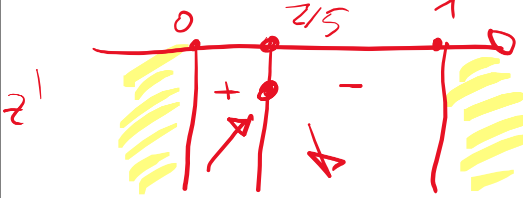
tale espressione è max se lo è $z = p^2(1-p)^3$; essendo $p+(1-p)=1=$ costante il massimo si ha quando

$$\frac{p}{2} = \frac{1-p}{3} \Rightarrow 3p = 2-2p \Rightarrow \boxed{p=\frac{2}{5}}$$

Metodo delle derivate

$$z' = 2p(1-p)^3 + p^2\cdot 3(1-p)^2(-1) =$$
$$= (1-p)^2(2p-2p^2-3p^2) =$$
$$= (1-p)^2(2p-5p^2) \geq 0$$
$$= p(1-p)^2(2-5p) \geq 0$$

Ma $p\geq 0$, $1-p\geq 0$ (perché $p\leq 1$) allora $z'\geq 0$ se $2-5p\geq 0 \Rightarrow p\leq \frac{2}{5}$



z è MAX se $p = \frac{2}{5}$

QUESITO 3

Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, è dato il piano $\pi: 3x - 2y + 5 = 0$.

- Determinare le coordinate del punto H, proiezione ortogonale di $P(4,2,1)$ sul piano π;
- Determinare l'intersezione della retta s: $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$ con il piano π.

La retta per $P(4,2,1) \perp$ a π ha equazioni parametriche:

$$r: \begin{cases} x = 4 + (3)t \\ y = 2 + (-2)t \\ z = 1 + (0)t \end{cases} \qquad (\vec{v}(3,-2,0) \text{ vettore normale a } \pi)$$

$$r: \begin{cases} x = 4+3t \\ y = 2-2t \\ z = 1 \end{cases}$$

H è l'intersezione tra r e π:

$$\pi: 3x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$3(4+3t) - 2(2-2t) + 5 = 0$$

$$12 + 9t - 4 + 4t + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$13t + 13 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \boxed{H(1;4;1)}$$

- L'intersezione di s e π si può ottenere risolvendo il sistema seguente:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y - 3 - 2y + 5 = 0 \Rightarrow y = -2 \\ x = y - 1 \end{cases} \quad x = -3$$

Quindi troviamo il punto $\boxed{A = (-3;-2;2)}$

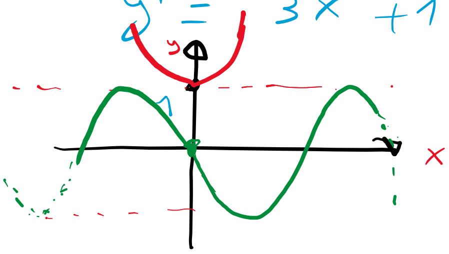
QUESITO 4

Dimostrare che l'equazione $x^3 + x - \cos x = 0$ ammette un'unica soluzione positiva.

Posto $y = x^3 + x - \cos x$ abbiamo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} (x^3) = \pm\infty$$

$$y' = 3x^2 + 1 + \sin x \geq 0 \Rightarrow 3x^2 + 1 \geq -\sin x$$

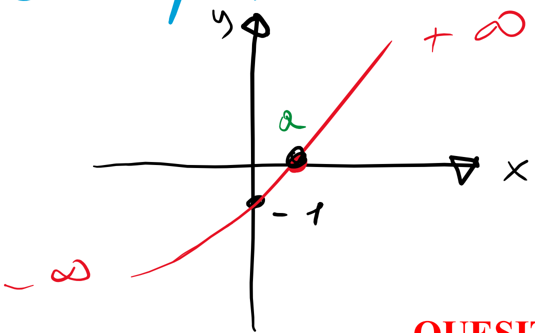


Quindi $y' > 0 \ \forall x$

Pertanto y è sempre crescente.

La funzione $y = x^3 + x - \cos x$ per $x = 0$ vale $y = -1$.

Il suo grafico qualitativo è quindi del tipo:



Abbiamo quindi l'unica soluzione positiva $x = a$

QUESITO 5

Determinare la funzione polinomiale di quarto grado $y = p(x)$ sapendo che, in un sistema di riferimento cartesiano, il suo grafico verifica le seguenti condizioni:

- è tangente all'asse x nell'origine;
- passa per il punto $(1,0)$;
- ha un punto stazionario in $(2,-2)$.

$$y = p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

- passaggio per $(1;0) \Rightarrow 0 = a + b + c + d + e$
- " " $(2;-2) \Rightarrow -2 = 16a + 8b + 4c + 2d + e$
- " " $(0;0) \Rightarrow 0 = e$

Deve essere $y'(0)=0$ (tg in 0 all'asse x)

e $y'(2)=0$ (la derivata prima si annulla nei punti stazionari)

$$y' = 4ax^3+3bx^2+2cx+d$$

$$y'(0) = d = 0$$

$$y'(2) = 32a+12b+4c+\cancel{d} = 0$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ 16a+8b+4c=-2 \\ e=0 \\ d=0, \quad 32a+12b+4c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b+c=0 \\ 8a+4b+2c=-1 \\ 8a+3b+c=0 \\ e=0, \quad d=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b+c=-1 \quad (2^a-3^a) \Rightarrow c=-1-b \\ 7a+2b=0 \quad (3^a-1^a) \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b-1-b=0 \quad a=1 \\ 7a+2b=0 \Rightarrow b=-\frac{7}{2} \\ c=-1-b=\frac{5}{2} \\ d=0, \; e=0 \end{cases}$$

Quindi:

$$y=p(x)=x^4-\frac{7}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2$$

QUESITO 6

Si consideri la funzione integrale $F(x)=\int_a^x \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt$, con $x \geq a$, in cui a indica un parametro reale positivo. Determinare il più grande valore di a in modo che $F\left(\frac{2}{\pi}\right)=-\frac{1}{2}$.

$$F\left(\frac{2}{\pi}\right)=\int_a^{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt=-\int_a^{2/\pi}\left[-\frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right]dt=$$

$$=-\left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)\right]_a^{\frac{2}{\pi}}=-\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{a}\right)\right]=$$

$$=\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{a}\right)-1=F\left(\frac{2}{\pi}\right)=-\frac{1}{2}}_{\text{Max valore di } a}$$

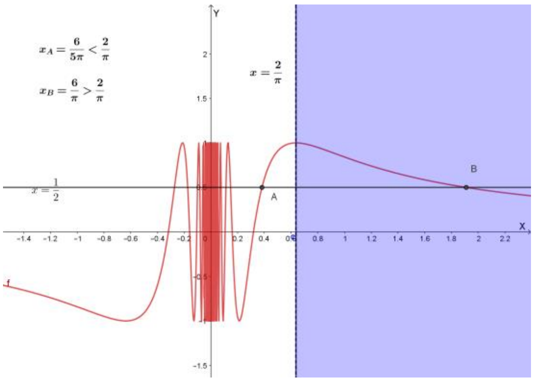
$(a>0)$

$(x \geq a)$ $\quad sen\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi & (1) \\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi & (2) \end{cases}$

Osserviamo che, essendo $a > 0$ deve essere $k \geq 0$. Inoltre il massimo valore di a corrisponde al minimo valore di $\frac{1}{a}$. Nel caso 1) il minimo valore di $\frac{1}{a}$ è $\frac{\pi}{6}$, nel caso 2) è $\frac{5}{6}\pi$ (con $k=0$). N.B. $x = \frac{2}{\pi}$ e deve essere $a \leq x = \frac{2}{\pi}$

Caso 1): $a_{max} = \frac{6}{\pi} > \frac{2}{\pi}$: non accettabile.

Caso 2): $a_{max} = \frac{6}{5\pi} < \frac{2}{\pi}$: accettabile.

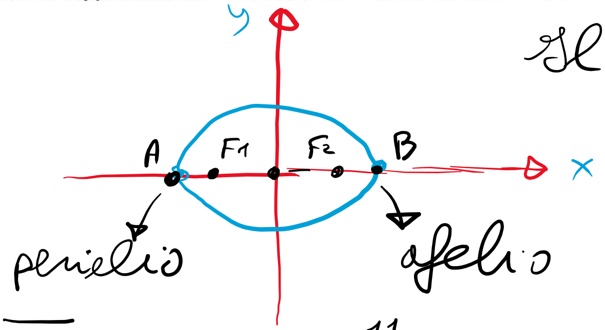


IL MASSIMO VALORE DI a è quindi

$$\boxed{a = \frac{6}{5\pi}}$$

QUESITO 7

Il prossimo 5 luglio la terra raggiungerà l'afelio, il punto della propria orbita in cui è massima la distanza dal Sole, pari a circa $1{,}52 \cdot 10^{11}$ m. Il perielio è invece il punto che si trova alla minima distanza dal Sole, pari a circa $1{,}47 \cdot 10^{11}$ m. Determinare, in un opportuno sistema di riferimento, l'equazione che rappresenta la traiettoria della Terra intorno al Sole.



Il sole occupa uno dei due fuochi, supponiamo F_1

$\overline{F_1B} = 1{,}52 \cdot 10^{11}$ m $= a + c$ (a semiasse maggiore, c semidist. focale)

$\overline{AF_1} = 1{,}47 \cdot 10^{11}$ m $= a - c$

$\overline{F_1B} + \overline{AF_1} = 2a \Rightarrow a = \frac{(1{,}52 + 1{,}47)\,10^{11}}{2}$ m

$c = (1{,}52 \cdot 10^{11} - a)$

Il semiasse minore b è: $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

e l'equazione della traiettoria

nel nostro sistema di riferimento è

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

con $a=\frac{2,99}{2}\cdot 10^{11}=1,495\cdot 10^{11}$

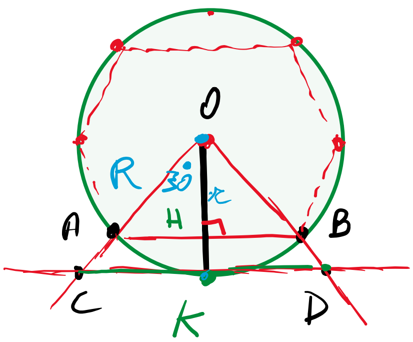
$c=0,025\cdot 10^{11}$

$b=\sqrt{a^2-c^2}\cong 1,4948\cdot 10^{11}$

(La traiettoria è pressoché circolare)

QUESITO 8

Scrive Carlo Emilio Gadda in uno dei racconti de *L'Adalgisa – Disegni milanesi*: «Le stanze del servizio, il bagno, i corridoi, l'anticamera e l'uno de' due gabinetti, eran pavimentati con piastrelle rosse di piccolo formato: esagonali [...]. L'apotèma di quelle mattonelle misurava centimetri 5,196: mentreché il raggio del circolo circoscritto raggiungeva i 60 millimetri».
Esprimere la relazione esatta tra raggio del cerchio circoscritto ed apotema (ossia il raggio del cerchio inscritto) per un esagono regolare. Verificare il risultato ottenuto alla luce delle misure indicate dallo scrittore. Spiegare perché, utilizzando piastrelle esagonali regolari tutte congruenti, è possibile pavimentare un piano. Con quali altri poligoni regolari, tra loro congruenti, è possibile pavimentare un piano? Motivare la risposta.



$\overline{OH}$ = apotema $= r$ (cerchio inscr.)

$\overline{OK} = R$ (ragg. cerchio circoscr.)

Ricordiamo $R=\overline{AB}$ e

$A\hat{O}B = C\hat{O}D = 60°$

$A\hat{O}H = 30°$

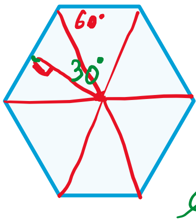
$r = R\cdot\cos 30° = R\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cong 0,86603$$

Con le misure indicate dallo scrittore:

$$\frac{r}{R}=\frac{5,196\text{ cm}}{60\text{ mm}}=\frac{5,196}{6}\cong 0,866$$

I risultati sono uguali fino alla quarta cifra decimale.



tagliando opportunamente la piastrella a forma di esagono regolare posso "riempire" l'angolo retto.

Anche con mattonelle quadrate o a forma di triangolo equilatero si può "riempire" l'angolo retto. Tali poligoni regolari sono gli unici con cui posso "tassellare" il piano perché l'angolo del poligono deve essere un divisore di 360° (affinché le piastrelle "si uniscano" internamente) e ciò vale solo se tale angolo è 60°, 90°, 120°.

Quindi si può "TASSELLARE" un piano con mattonelle aventi la forma di un poligono regolare solo con: triangoli equilateri, quadrati, esagoni regolari.

Per un approfondimento sul **Problema della Tassellatura** si veda il seguente link di Wikipedia

Giuseppe Scoleri, con la collaborazione di Angela Santamaria