ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Tema di MATEMATICA **- a.s. 2000/2001**

Testo valevole per i CORSI SPERIMENTALI AUTONOMI (2^a tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve C_m di equazione:

$$y = f_m(x) \ ,$$

dove:

$$f_m(x) = \frac{x+m}{|x+m|-m}$$

ed m è un parametro reale non nullo.

a) Trovare l'insieme di definizione e l'insieme di derivabilità di f_m .

b) Dimostrare che ogni curva C_m ha un centro di simmetria.

c) Studiare e disegnare la curva C_2 corrispondente ad m=2.

d) Determinare l'equazione della retta t tangente a C_2 nel punto di ascissa –1 e l'ascissa dell'ulteriore punto comune alla retta t e alla curva C_2.

e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_2 e dalla retta t.

PROBLEMA 2.

È dato il rettangolo ABCD i cui lati AB e AD sono lunghi rispettivamente 2*a* ed *a*, essendo *a* una lunghezza nota. Indicare con E il punto simmetrico di A rispetto alla retta BD e con F il punto in cui si secano le rette EB e DC.

a) Dimostrare, con considerazioni di geometria sintetica, che i punti A, B, C, E, D appartengono ad una stessa circonferenza k.

b) Stabilire che la lunghezza del segmento DF è $\frac{5}{4}a$.

c) Calcolare l'area del pentagono ABCED.

d) Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della circonferenza k e le coordinate dei punti A ed E.

e) Calcolare, infine, le aree delle due regioni piane in cui la retta EC divide il cerchio delimitato da k.

QUESTIONARIO.

1. Considerate le funzioni reali di variabile reale f(x) e g(x), dire se la seguente proposizione è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta: «Condizione necessaria e sufficiente affinché risulti f '(x) = g'(x) è che sia f(x) = g(x)».

2. Il limite della funzione $\frac{x^2 - \text{sen}\, x}{x^2 - \cos x}$, quando x tende a + infinito:

A) è uguale a 0;

B) è uguale a 1;
C) è uguale a + infinito;
D) non esiste.
Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché f(x) sia continua nel punto a è che risulti derivabile in a.

4. Una primitiva della funzione f(x) è sen 2x. Se è possibile, calcolare
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{x}{3}\right) dx$. Altrimenti spiegare perché il calcolo non è possibile.

5. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti rappresentati dalla seguente equazione:

$$x^2 + y^2 - 4xy = 0 .$$

Tale luogo è costituito da:
A) un punto;
B) due punti;
C) una retta;
D) due rette;
E) una figura diversa dalle precedenti.
Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

6. Calcolare la derivata della funzione cos 2x ricorrendo alla definizione di derivata.

7. Il teorema di Lagrange afferma che: «Se f(x) è una funzione reale di variabile reale continua in un intervallo chiuso e limitato [a, b] e derivabile nell'intervallo aperto (a, b) allora esiste almeno un punto c dell'intervallo (a, b) tale che:

[1] $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$ ».

Fornire un'interpretazione geometrica del teorema e, sempre con ricorso all'interpretazione geometrica, far vedere che, se viene meno la condizione della derivabilità di f(x) nell'intervallo (a, b) allora può non esistere alcun punto c dell'intervallo (a, b) per il quale sussista la [1].

8. Posto che ln x indichi il logaritmo di x in base *e*, risulta
$\sqrt{\ln^2 x + 2\ln x + 1} = \ln x + 1$ per tutti e soli gli x reali tali che:

A) $x \geq 0$; B) $x \geq 1$; C) $x \geq e$; D) $x \geq \frac{1}{e}$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

9. La base maggiore, la base minore e il perimetro di un trapezio isoscele misurano nell'ordine: 10 cm , 8 cm , 30 cm . Dire se il trapezio è circoscrittibile ad un cerchio o se è inscrittibile in un cerchio e giustificare le risposte.

10. In un piano, riferito ad assi cartesiani ortogonali, sono assegnate una retta a di coefficiente angolare 2 ed una retta b di coefficiente angolare -2. Calcolare il seno dell'angolo orientato (a,b).

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.