ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

a.s. 2001/2002

CORSO SPERIMENTALE

Tema di MATEMATICA e INFORMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

È dato il triangolo ABC, rettangolo in C, tale che AC e BC sono lunghi rispettivamente $a\sqrt{3}$ e $3a$, essendo a una lunghezza assegnata. Indicato con H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, siano P un generico punto dell'ipotenusa AB e z la misura, in radianti, dell'angolo $H\hat{C}P$.

a) Determinare in funzione di z la somma delle distanze di P dai vertici del triangolo.

b) Determinare la posizione di P per cui è minima tale somma.

c) Indicata con D la posizione di P per cui il triangolo PBC è isoscele, calcolare la lunghezza di DC.

d) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di riferimento cartesiano (Oxy), trovare l'equazione della circonferenza k avente il centro in D e passante per C, e stabilire come sono posizionati i punti A, B rispetto a k.

e) Calcolare le aree delle regioni piane in cui la retta BC divide il cerchio delimitato da k.

f) Calcolare, infine, il volume del solido generato dalla minore delle due regioni suddette quando ruota di un giro completo attorno alla retta DB.

PROBLEMA 2.

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = k\,x^3 - (2-k)\,x^2 - (3-2k)\,x + 2\ ,$$

dove k è un parametro reale non nullo.

a) Dimostrare che le curve assegnate hanno uno ed un solo punto in comune.

b) Indicata con γ quella, fra tali curve, che si ottiene per k=1, dimostrare che γ ha un centro di simmetria.

c) Dimostrare che la curva γ interseca l'asse x in uno ed un solo punto A di ascissa x_A.

d) Determinare il numero intero z tale che:

$$\frac{z}{10} < x_A < \frac{z+1}{10}.$$

e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva γ, dagli assi di riferimento e dalla retta di equazione x=1.

QUESTIONARIO.

1. Due circonferenze, k e k', sono tangenti esternamente nel punto T. Due rette distinte, a e b, condotte per T, secano la circonferenza k rispettivamente nei punti A, B e la circonferenza k' nei punti A' e B'. Stabilire se le rette AB e A'B' sono parallele o incidenti e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2. Una piramide è divisa da un piano parallelo alla base in due parti: una piramide e un tronco di

piramide. Il piano sezione divide l'altezza della piramide in due parti, di cui quella che contiene il vertice della piramide è doppia dell'altra. Stabilire se i dati sono o no sufficienti per calcolare il rapporto fra il volume della piramide recisa e quello del tronco di piramide.

3. In un piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$3x^2 + 3y^2 - 6kx + y + 2 = 0 ,$$

dove k è un parametro reale.
Determinare, se esistono, i valori di k per cui il luogo è costituito da:

A) un punto; B) due punti; C) infiniti punti; D) nessun punto.

4. Dimostrare che il numero $\sqrt{5}$ non è razionale.

5. Si considerino i numeri: $2^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{1}{3}}$, $5^{\frac{1}{5}}$. Senza usare strumenti di calcolo automatico (salvo che per controllare eventualmente l'esattezza del risultato), disporli in ordine crescente ed illustrare il ragionamento fatto per tale operazione.

6. Calcolare la derivata, rispetto ad x, della seguente funzione:

$$f(x) = \int_x^{x+2} e^{-t}\,dt ,$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

7. Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = 1 + 2 + 4 + \ldots + (2\times 2^{n-1}) + (2\times 2^n) ,$$

calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2^{2n}}$.

8. I numeri reali a, b sono tali che:

$$4.3 < a < 5.2 \quad \text{e} \quad -1.7 < b < -1.5 .$$

Dire se è vero o falso che risulta:

$$5.8 < a - b < 6.9$$

e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

9. Considerata la funzione reale di variabile reale f(x), continua e positiva nell'intervallo a£x£b, descrivere un algoritmo che calcoli un valore approssimato a meno di 10^{-3} dell'area del trapezoide: T = $\{(x, y) \mid a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$.

10. Si consideri la seguente equazione in x:

$$2x + \ln x = 0 .$$

Dimostrare, col metodo preferito, che ammette una soluzione reale ed una soltanto e descrivere un algoritmo che ne calcoli un valore approssimato a meno di 1/10.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.