

ESAME DI STATO: Indirizzo Scientifico
Americhe- Emisfero boreale- Sessione suppletiva 2005
SECONDA PROVA SCRITTA
Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy , sono assegnate le curve di equazione

$$(1) \quad y = \frac{1}{3}x^3 + kx - 3,$$

dove k è un parametro reale.

- a) Dimostrare che tutte le curve (1) passano per uno stesso punto A che per ciascuna di esse è punto di flesso e centro di simmetria.
- b) Dimostrare inoltre che tutte le curve (1) hanno un massimo e un minimo relativi oppure non hanno né l'uno né l'altro.
- c) Trovare a quale valore di k corrisponde una curva (1) tangente all'asse x .
- d) Indicare con γ quella, tra le curve (1), la cui tangente in A individua con gli assi coordinati un triangolo di area $9/4$ e, nel medesimo tempo, presenta un massimo e un minimo relativi.
- e) Fra i rettangoli contenuti nella regione finita di piano delimitata dalla curva γ e dagli assi coordinati e aventi un lato sull'asse x e gli estremi del lato opposto sulla curva γ , determinare i vertici di quello per il quale questo secondo lato dista $95/24$ dall'asse x .

Problema 2

Un prisma retto ha per basi i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$ e i suoi spigoli laterali sono $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$. Gli spigoli di base del prisma misurano 2 cm, quelli laterali misurano 5 cm.

- a) Indicata con φ l'ampiezza dell'angolo che un piano, contenente lo spigolo \overline{AB} , forma col piano della base $ABCD$, determinare a quale condizione deve soddisfare φ affinché il piano intersechi la faccia laterale $CDD'C'$ del prisma.
- b) Condotto per lo spigolo \overline{AB} il piano formante un angolo di 60° col piano della base $ABCD$, dimostrare che questo piano seca il prisma secondo un rettangolo e determinare le misure dei lati di tale rettangolo.
- c) Dopo aver riferito il piano del rettangolo precedente ad un conveniente sistema di assi cartesiani Oxy , trovare l'equazione dell'ellisse inscritta nel rettangolo e le coordinate dei suoi fuochi.
- d) Dimostrare che la bisettrice dell'angolo avente il vertice in un punto T dell'ellisse e i lati passanti per i suoi fuochi risulta perpendicolare alla tangente all'ellisse nel punto T .
- e) Calcolare infine l'area della regione piana racchiusa dall'ellisse.

Questionario

1. La finale di nuoto “100 metri rana” è disputata da 6 atleti. Quanti sono, in teoria, i possibili ordini di arrivo?
2. Calcolare un valore, approssimato a meno di un grado centesimale, dell'angolo che una diagonale del cubo forma con una delle facce.
3. Sia S_n la somma di n numeri in progressione aritmetica di primo termine $1/2$ e ragione $3/2$. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2}.$$

4. È vero o falso che il grafico della funzione

$$\ln(x+2)^2$$

coincide con quello della funzione

$$2 \ln(x+2)?$$

Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

5. Utilizzando il procedimento preferito, dimostrare la seguente proprietà: “Se due numeri reali positivi variano in modo che il loro prodotto si mantenga costante, allora la loro somma è minima quando essi sono uguali”.
6. Trovare la funzione $f(x)$ avente come primitiva la funzione $\tan \sqrt{x}$.
7. Fornire un esempio di funzione reale di variabile reale $f(x)$ tale che

$$f(0) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(2) = 2.$$