Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Dato il triangolo ABC, rettangolo in C, di cateti 3 e 4, si consideri una retta passante per C, non secante il triangolo e formante un angolo x con il cateto $\overline{AC}$.

a) Dette A' e B' le proiezioni ortogonali di A e B su tale retta, si esprima mediante $t = \tan(x/2)$ il perimetro y del quadrilatero $AA'B'B$, controllando che risulta:

$$y = \frac{-2t^2 + 14t + 12}{t^2 + 1}.$$

b) Si studi e si rappresenti graficamente tale funzione.

c) Si esprima in funzione di $\sin(2x)$ il rapporto tra l'area del quadrilatero $AA'B'B$ e quella del triangolo dato e se ne tracci il grafico nell'intervallo di variabilità di x imposto dai limiti geometrici del problema.

d) Si calcoli l'area sottesa da quest'ultima curva nel suddetto intervallo.

Problema 2

Si consideri la funzione f definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

1. Si studi f e se ne tracci il grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. Si considerino la retta r tangente a γ nel punto di flesso e la retta s, perpendicolare a r, condotta dal punto di γ di ascissa $1/2$. Si calcoli l'area del triangolo formato da r, da s e dall'asse y.
3. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata da γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1/2$.
4. Dopo aver verificato che sono soddisfatte le condizioni di invertibilità, si ricavi l'espressione analitica $x = g(y)$ della funzione g inversa di f.

Questionario

1. Lanciando due dadi, qual è il numero che ha maggiore probabilità di uscita? Qual 'è la probabilità che esca un numero primo?
2. Si dimostri che l'equazione $\cos x - x = 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
3. Si calcoli il valore medio della funzione

$$f(x) = \arctan \frac{x-1}{x+1}$$

sull'intervallo $0 \leq x \leq 1$.

4. Sia dato un triangolo avente i lati lunghi rispettivamente 13 cm, 14 cm e 15 cm e il cerchio in esso inscritto. Si scelga a caso un punto all'interno del triangolo: si determini la probabilità che tale punto risulti esterno al cerchio.

5. Si calcoli il limite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2-t}\, dt}{x^3}.$$

6. Un serbatoio della capacità di $400\,\mathrm{m}^3$ deve avere la forma di un cilindro circolare retto senza coperchio. Il materiale da costruzione per il fondo costa per m^2 il doppio di quello che serve per le pareti laterali. Si calcoli il rapporto fra il raggio r e l'altezza h in modo che la costruzione risulti la più economica.

7. Una statua alta 70 metri viene sistemata su una collina di altezza h. Da un certo punto A, situato a livello del suolo, gli angoli di elevazione per la base B e la cima C della statua misurano rispettivamente $20{,}75°$ e $28{,}30°$. Si determini l'altezza h.

8. In un piano cartesiano Oxy una retta verticale divide il triangolo con i vertici nei punti $(0,0)$, $(1,1)$ e $(9,1)$ in due regioni di ugual area. Si trovi l'equazione di tale retta.

9. Un tronco di cono è circoscritto ad una sfera di raggio r. Si stabilisca la relazione che esiste fra i raggi di base del tronco e il raggio della sfera.

10. Due punti A e B, il primo sull'asse x e l'altro sull'asse y, distano dall'origine rispettivamente 35 cm e 15 cm. Ambedue si muovono con moto rettilineo ed uniforme verso l'origine: A con velocità $v_1 = 3\,\mathrm{cm/s}$, B con velocità $v_2 = 1\,\mathrm{cm/s}$. In quale istante è minima la distanza tra i due punti e quanto vale questo minimo?