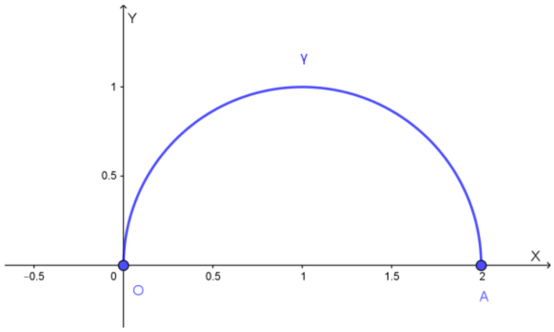
Scuole italiane all'estero (America latina) 2011

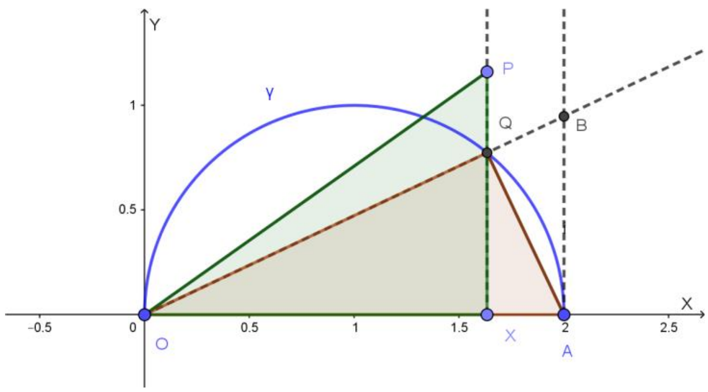
PROBLEMA 2

In un riferimento cartesiano Oxy si consideri la semicirconferenza γ, tangente nell'origine all'asse y, passante per il punto A(2, 0) e appartenente al primo quadrante.



a)

Sia X un punto del diametro OA, distinto da O, Q il punto di γ avente la stessa ascissa di X e B il punto in cui la semiretta OQ incontra la tangente in A alla semicirconferenza. Sia P un punto della semiretta XQ tale che i due triangoli OPX e OQA abbiano uguale area. Qual è la posizione limite di P quando X tende a O? E quando tende ad A? Sia P_1 la posizione di P quando $A\hat{O}Q = \frac{\pi}{6}$; si determinino le coordinate di P_1.



Poniamo $X = (t; 0), con\ 0 < t \leq 2)$. Per secondo teorema di Euclide risulta:

$$XQ = \sqrt{t(2-t)}$$

Quindi l'area del triangolo OQA è:

$$Area(OQA) = \frac{OA \cdot XQ}{2} = XQ = \sqrt{t(2-t)}$$

L'area di OPX è data da:

$$Area(OPX) = \frac{OX \cdot XP}{2} = \frac{t \cdot XP}{2} = Area(OQA) = \sqrt{t(2-t)}$$

Quindi:

$$\frac{t \cdot XP}{2} = \sqrt{t(2-t)}\ , \quad XP = \frac{2\sqrt{t(2-t)}}{t}, \qquad perciò\text{:}\ P = \left(t;\ \frac{2\sqrt{t(2-t)}}{t}\right)$$

Quando X tende ad O, P si allontana indefinitamente sulla semiretta XQ, quindi:
se X tende ad O, P tende all'infinito.
A conferma di ciò osserviamo che se X tende ad O allora $t \to 0^+$, quindi la posizione limite di P si ottiene calcolando il seguente limite:

$$\lim_{t\to 0^+} y_P = \lim_{t\to 0^+} \frac{2\sqrt{t(2-t)}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2\sqrt{t}\sqrt{(2-t)}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2\sqrt{t}\sqrt{2}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2t\sqrt{2}}{t\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{t}} = +\infty$$

Quando X tende ad A e P si avvicina ad X sulla semiretta XQ, quindi:
se X tende ad A anche P tende A.

A conferma di ciò osserviamo che se X tende ad A allora $t \to 2^-$, quindi la posizione

limite di P si ottiene calcolando il seguente limite: $\lim_{t\to 2^-} y_P = \lim_{t\to 2^-} \frac{2\sqrt{t(2-t)}}{t} = 0^+$.

Quando $A\hat{O}Q = \frac{\pi}{6}$ si ha $OQ = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\,,\ XO = t = OQ\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$.
Per tale valore di t si ha:

$$P_1 = \left(t;\ \frac{2\sqrt{t(2-t)}}{t}\right) = \left(\frac{3}{2};\ \frac{2\sqrt{\frac{3}{2}(2-\frac{3}{2})}}{\frac{3}{2}}\right) = \left(\frac{3}{2};\ \frac{2\sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{2}}\right) = \left(\frac{3}{2};\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = P_1$$

b)

Si provi che il luogo geometrico Γ descritto da P, al variare di X su OA, è il ramo, appartenente al primo quadrante, della curva di equazione

$$xy^2 + 4x - 8 = 0$$

Essendo $P = \left(t;\ \frac{2\sqrt{t(2-t)}}{t}\right),\ con\ \ 0 < t \le 2$, il luogo richiesto ha le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{2\sqrt{t(2-t)}}{t} \end{cases} \quad ; \quad y = \frac{2\sqrt{x(2-x)}}{x}; \quad xy = 2\sqrt{x(2-x)} \ ; \ x^2y^2 = 4x(2-x), da\ cui:$$

$xy^2 + 4x - 8 = 0, \ \ 0 < x \leq 2 \ \ e \ \ \ y \geq 0, \ \ c.v.d.$

Animazione con Geogebra

c)

Si disegni Γ.

Il luogo di equazione $xy^2 + 4x - 8 = 0$ può essere visto nella forma

$$\boldsymbol{y = \frac{2\sqrt{x(2-x)}}{x}}$$

$con\ \ \mathbf{0} < \boldsymbol{x} \leq \mathbf{2} \ \ \ (che\ è\ il\ dominio\ della\ funzione)$

OPPURE nella forma

$$\boldsymbol{x = \frac{8}{y^2+4}} \ , \qquad \boldsymbol{con\ y \geq 0} \ \ \ (*)$$

Studiando la funzione di equazione $y = f(x) = \frac{8}{x^2+4}$ (chiaramente più semplice), il luogo (*) si ottiene con una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante $(y = x)$.

Studiamo quindi la funzione di equazione:

$$\boldsymbol{y = f(x) = \frac{8}{x^2+4}}$$

Questa funzione è definita per ogni x, è pari, sempre positiva ed ha un massimo assoluto per x=0 (uguale a 2). Non ci sono intersezioni con l'asse x. L'asse y è tagliato nel punto di ordinata 2.

I limiti sono:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{8}{x^2+4} = 0^+ \ : \ \ y = 0\ asintoto\ orizzontale.$$

La funzione è sempre derivabile e per x>0 è decrescente, per x<0 è crescente (basta analizzare la frazione: per x>0 al crescere di x cresce il denominatore, quindi decresce la frazione; per x<0 al crescere di x il suo quadrato decresce, quindi il denominatore decresce, perciò cresce la frazione). Se x=0 abbiamo un massimo assoluto (0; 2).

Per completare lo studio della funzione mancano solo i flessi.

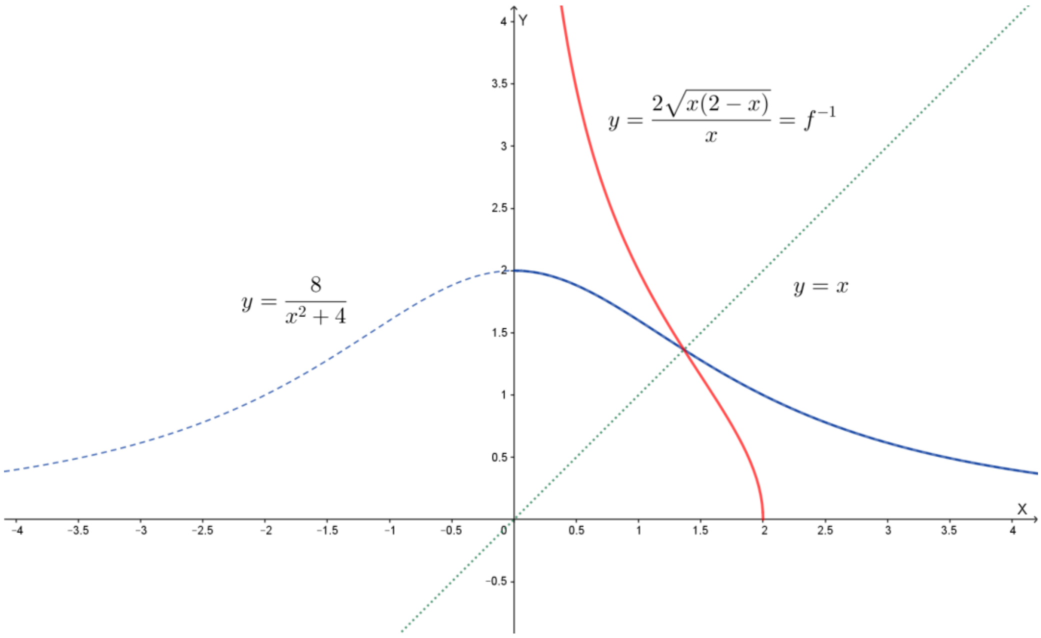
$y' = \dfrac{-16x}{(x^2+4)^2} > 0 \;\; per\; x < 0\text{:}\;\; ciò\; conferma\; che\; la\; funzione\; cresce\; per\; x < 0.$

$$y'' = \frac{-16(x^2+4)^2 + 16x(4x)(x^2+4)}{(x^2+4)^4} = 16\,\frac{(x^2+4)(-x^2-4+4x^2)}{(x^2+4)^4} =$$

$$= 16\,\frac{(x^2+4)(3x^2-4)}{(x^2+4)^4} \geq 0 \;\; se \;\; 3x^2-4 \geq 0\text{:}\;\; x \leq -\sqrt{\frac{4}{3}} \;\; vel \;\; x \geq \sqrt{\frac{4}{3}} \;:$$

Il grafico volge la concavità verso l'alto per $x < -\sqrt{\frac{4}{3}} \;\; vel \;\; x > \sqrt{\frac{4}{3}}$ e verso il basso per $-\sqrt{\frac{4}{3}} < x < \sqrt{\frac{4}{3}}$: punti di flesso $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$, di ordinata $y = \frac{8}{\frac{4}{3}+4} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$.

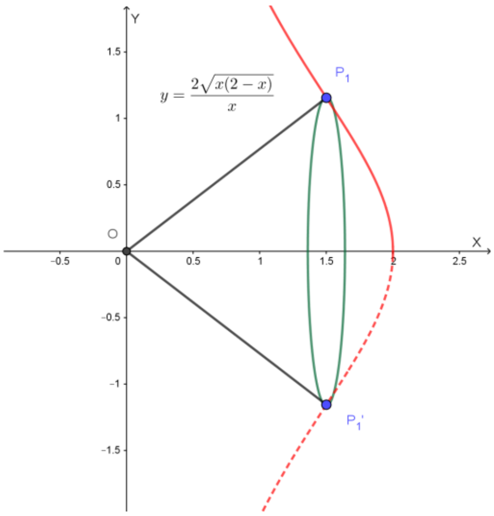
Il grafico del luogo è quello indicato in rosso, con $0 < x \leq 2,\; e \;\; Flesso = \left(\frac{3}{2};\, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$:



d)

Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x della regione piana limitata dalla retta OP_1, da Γ e dall'asse x.

Rappresentiamo la regione richiesta:



La retta per $O = (0;0)$ e $P_1 = \left(\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ ha equazione: $y = \frac{4}{9}\sqrt{3}\,x$.

Il volume richiesto è dato da:

$V = V_1 + V_2$, essendo V_1 il volume del cono di raggio $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ e altezza $\frac{3}{2}$. Quindi:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

Risulta poi:

$$V_2 = \pi\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(\frac{2\sqrt{x(2-x)}}{x}\right)^2 dx = 4\pi\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(\frac{2-x}{x}\right)dx = 4\pi\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x}-1\right)dx = 4\pi[2\ln x - x]_{\frac{3}{2}}^{2} =$$

$$= 4\pi\left(2\ln 2 - 2 - 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}\right) = 4\pi\left(\ln 4 - \frac{1}{2} - \ln 9 + \ln 4\right) = 4\pi\left(\ln\left(\frac{16}{9}\right) - \frac{1}{2}\right)$$

Quindi:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{2}{3}\pi + 4\pi\left(2\ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{2}\right) = 2\pi\left(\frac{1}{3} + 4\ln\frac{4}{3} - 1\right) = 2\pi\left(4\ln\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right) = V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria