LICEO SCIENTIFICO BOREALE 2 ORDINARIA 2024 - PROBLEMA 1

Fissato un parametro reale k, con $k \neq 0$, si consideri la funzione f_k così definita:

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{k(x+2)}{\sqrt{x+1}}, & se\ x > 0 \\ -x^2 + 2k\ , & se\ x \leq 0 \end{cases}$$

Sia Γ_k il grafico di f_k in un piano cartesiano Oxy.

a)

Al variare del parametro k, dimostrare che la funzione è sempre continua e derivabile in tutto il suo insieme di definizione e discutere la natura del punto stazionario P, del quale se ne chiedono le coordinate.

Per $x > 0$ $\ f_k(x) = \frac{k(x+2)}{\sqrt{x+1}}$, definita e continua per $x > -1$, quindi è continua, per ogni $k,\ se\ x > 0$.
Per $x < 0$ $\ f_k(x) = -x^2 + 2k$, definita e continua per ogni x, quindi è continua, per ogni $k,\ se\ x < 0$.

Analizziamo la continuità in $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f_k(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{k(x+2)}{\sqrt{x+1}} = 2k$$

$$\lim_{x\to 0^-} f_k(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x^2 + 2k) = 2k = f_k(0)$$

Quindi, essendo $\lim_{x\to 0^+} f_k(x) = \lim_{x\to 0^-} f_k(x) = f_k(0)$ per ogni k, la funzione è continua anche in $x = 0$, pertanto:
la funzione è continua per ogni valore di k in tutto il suo insieme di definizione (R).

Analizziamo la derivabilità.

Per $x > 0$ $\ f'_k(x) = \frac{k\sqrt{x+1} - k(x+2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{2k(x+1)-k(x+2)}{2\sqrt{x+1}(x+1)} = \frac{kx}{2\sqrt{x+1}(x+1)}$: definita $per\ ogni\ x > -1$, quindi la funzione è derivabile, per ogni k, se $x > 0$.

Per $x < 0$ $\ f'_k(x) = -2x$: definita per ogni x, quindi la funzione è derivabile per ogni k (quindi anche per $k \neq 0$ come indica il testo), se $x < 0$.

Analizziamo la derivabilità in $x = 0$.

Risulta:

$$\lim_{x\to 0^+} f'_k(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{kx}{2\sqrt{x+1}(x+1)} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'_k(x) = \lim_{x\to 0^-} (-2x) = 0$$

Pertanto: $\lim_{x\to 0^+} f'_k(x) = \lim_{x\to 0^-} f'_k(x) = 0$.

Essendo la funzione continua su tutto R (per ogni k), per la condizione sufficiente di derivabilità, la funzione è derivabile (per ogni k) anche se $x = 0$. Concludendo:

la funzione è derivabile per ogni valore di k in tutto il suo insieme di definizione (R).

Il punto stazionario P (punto in cui si annulla la derivata prima), in base a quanto detto sopra, ha ascissa $x = 0$. Quindi: $P = (0; 2k)$.

Per $x > 0$ è $f'_k(x) = \frac{kx}{2\sqrt{x+1}(x+1)} > 0$ $per\ ogni\ x\ se\ \ k > 0$ $(la\ funzione$ è $crescente)$

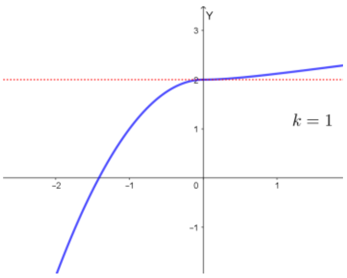
Per $x < 0$ è $f'_k(x) = -2x > 0$ $per\ ogni\ x < 0$ (per $x < 0$ $la\ funzione$ è $sempre\ crescente$).

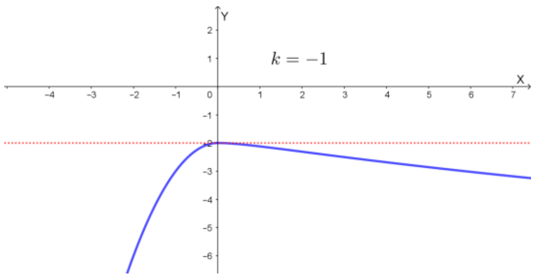
Quindi:

- se $k > 0, x = 0$ è punto di flesso a tangente orizzontale (ascendente)
- se $k < 0, x = 0$ è punto di massimo relativo (per $x < 0$ $f'_k(x) > 0$, funzione crescente, per $x > 0$

  $f'_k(x) < 0$, funzione decrescente).

Forniamo due esempi grafici, uno per $k = 1$ ed uno per $k = -1$:





b)

Determinare il valore del parametro k affinché la retta tangente a Γ_k, nel suo punto di ascissa $x = 2$, sia perpendicolare alla retta di equazione $6x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - 1 = 0$. Successivamente determinare l'equazione di tale retta tangente.

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{k(x+2)}{\sqrt{x+1}}, & se\ x > 0 \\ -x^2 + 2k\ , & se\ x \le 0 \end{cases}$$

Per $x = 2$ si ha $y = \frac{4k}{\sqrt{3}}$.

Inoltre, essendo per $x > 0$ $f'_k(x) = \frac{kx}{2\sqrt{x+1}(x+1)}$, si ha: $f'_k(2) = \frac{k}{3\sqrt{3}} = m(tangente)$.

Il coefficiente angolare della retta $6x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - 1 = 0$ è $m = -\frac{18}{\sqrt{3}}$. Dovrà quindi essere:

$\left(\frac{k}{3\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{18}{\sqrt{3}}\right)=-1, \qquad -2k=-1\,, k=\frac{1}{2}.$

La tangente in $\left(2;\ \frac{4k}{\sqrt{3}}\right)=\left(2;\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ ha coefficiente angolare $m=\frac{k}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{6\sqrt{3}}$. La tangente richiesta ha quindi equazione:

$y-\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{6\sqrt{3}}(x-2),\ \ y=\frac{1}{6\sqrt{3}}\,x-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\,, \quad y=\frac{1}{6\sqrt{3}}\,x+\frac{5}{3\sqrt{3}}$

c)

Si ponga d'ora in avanti $k=\frac{1}{2}$. Studiare la funzione $f_{\frac{1}{2}}(x)$ e tracciarne il grafico $\Gamma_{\frac{1}{2}}$. Si consideri il trapezio rettangolo inscritto nella regione finita di piano del II quadrante delimitata dagli assi cartesiani e da $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ e avente base maggiore OP. Determinare le coordinate del punto Q appartenente a $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ affinché la superficie di tale trapezio sia massima.

Per $k=\frac{1}{2}$ la funzione ha equazione:

$$y=f(x)=f_{\frac{1}{2}}(x)=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2}(x+2)}{\sqrt{x+1}}\,, & se\ x>0\\ -x^2+1\,, & se\ x\leq 0\end{cases}$$

- Dominio: R
- Se $x=0, y=1$
- Se $y=0$: $per\ x>0, x=-2\ non\ accettabile. Per\ x<0: x=\pm 1, accettabile\ solo\ x=-1.$
- Segno della funzione: $se\ x>0\ \ y>0\ sempre. Se\ x\leq 0, y>0\ \ se-x^2+1>0,$
  $x^2<1, -1<x<1,$ accettabile solo $-1<x\leq 0$. Quindi $y>0\ per\ x>-1$.
- Limiti agli estremi del dominio:

  $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x^2+1)\ =-\infty$$
  $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}(x+2)}{\sqrt{x+1}}\right)\ =\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}x}{\sqrt{x}}\right)\ =+\infty$$
  ($il\ numeratore$ è $infinito\ di\ ordine\ superiore$)

Non ci sono asintoti verticali (la funzione è continua su tutto R).

Per $x\to-\infty$ non c'è asintoto orizzontale né obliquo (funzione razionale intera di secondo grado).
Per $x\to+\infty$ non c'è asintoto orizzontale (perché $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$) né obliquo, essendo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}x}{\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x}}\right)\ =0^+$$

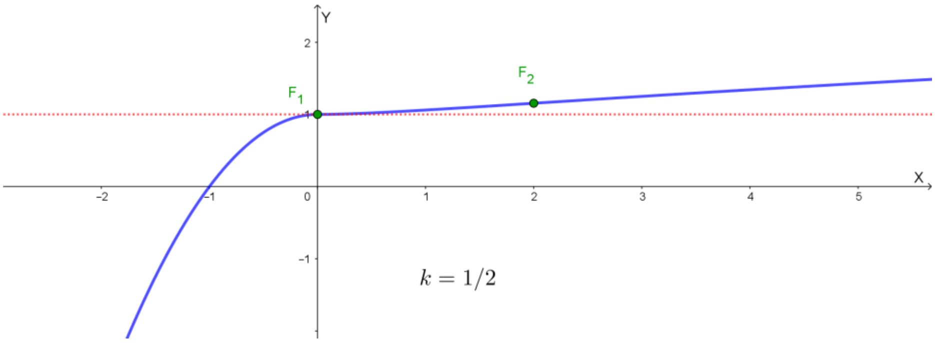
- Studio della derivata prima.
  Come già visto nel punto a), per $k>0$ la funzione è sempre crescente ed ha in $(0;\ 2k)=(0;\ 1)$ un flesso a tangente orizzontale.

- Studio derivata seconda:

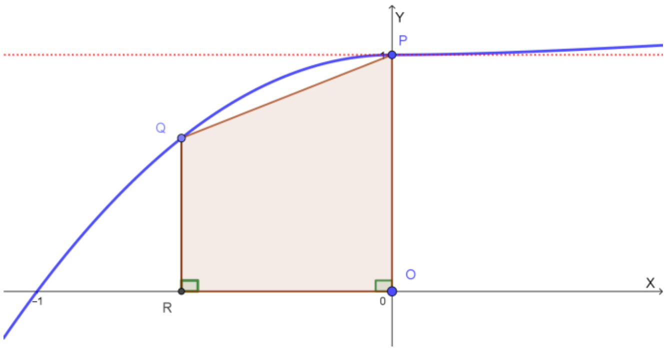
  Per $x > 0$ si ha: $y' = \frac{kx}{2\sqrt{x+1}(x+1)} = \frac{x}{4\sqrt{x+1}(x+1)}$ quindi: $y'' = \cdots = \frac{2-x}{8(x+1)^2\sqrt{x+1}}$ e risulta: $y'' > 0\ se\ 0 < x < 2,\ \ y'' < 0\ \ se\ \ x > 2$. Quindi per $0 < x < 2$ il grafico volge la concavità verso l'alto e per $x > 2$ verso il basso: $x = 2\ punto\ di\ flesso$ (con ordinata $\frac{2}{\sqrt{3}}$).
- Per $x < 0\ si\ ha: y' = -2x$ quindi: $y'' = -2 < 0\ per\ ogni\ x$: quindi per $x < 0$ il grafico volge sempre la concavità verso il basso.

- Ricordiamo che anche $x = 0$ è punto di flesso (ordinata 1).
- Osserviamo che la tangente nel flesso $\left(2;\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ ha equazione $y = \frac{1}{6\sqrt{3}}\ x + \frac{5}{3\sqrt{3}}$, come visto nel punto b).

Grafico della funzione:



Passiamo alla seconda parte del quesito. In figura è rappresentato il trapezio con i dati forniti.



Dobbiamo determinare le coordinate del punto Q della curva (appartenente al secondo quadrante) in modo che l'area S del trapezio OPQR risulti massima. Essendo Q nel secondo quadrante, le sue coordinate devono soddisfare l'equazione: $y = -x^2 + 1$. Poniamo $Q = (x;\ -x^2 + 1)$ con $-1 \leq x \leq 0$.

$$S = \frac{(\overline{OP} + \overline{QR}) \cdot \overline{OR}}{2} = \frac{[1 + (-x^2 + 1)] \cdot |x|}{2} = \frac{(2 - x^2)(-x)}{2} = \frac{1}{2}x(x^2 - 2) = \frac{1}{2}x^3 - x\,,$$
$con\ -1 \leq x \leq 0.$

Risulta: $S' = \frac{3}{2}x^2 - 1 > 0\ \ se\ \ x^2 > \frac{2}{3}\,,\ \ x < -\sqrt{\frac{2}{3}}\ \ vel\ \ x > \sqrt{\frac{2}{3}}$. E essendo $-1 \leq x \leq 0$ si ha:

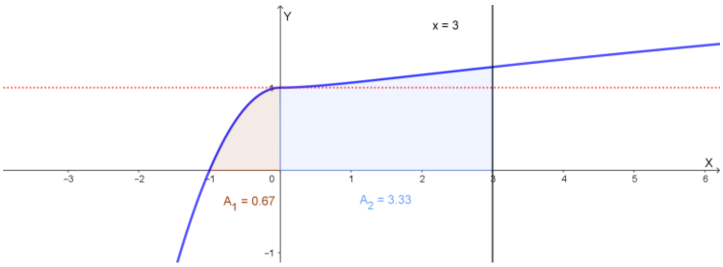
$S' \geq 0$ *se* $-1 \leq x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}$ ed $S' \leq 0$ se $-\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq 0$. Pertanto S cresce per $-1 \leq x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}$ e decresce per $-\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq 0$, pertanto: S è massima se l'ascissa di Q $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$. L'ordinata di Q si ottiene sostituendo tale valore in $y = -x^2 + 1$ quindi $y = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$.

Il punto Q richiesto ha coordinate: $Q = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{1}{3}\right)$.

d)

Determinare l'area della regione finita di piano delimitata da $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ *, dall'asse delle ascisse e dalla retta* $x = 3$.

Rappresentiamo graficamente la regione richiesta:



L'area richiesta è data da $A_1 + A_2$ e risulta:

$$A_1 = \int_{-1}^{0} (-x^2 + 1)\, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(+\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{2}{3} \cong 0.67\ u^2$$

$$A_2 = \int_0^3 \frac{\frac{1}{2}(x+2)}{\sqrt{x+1}}\, dx$$

Calcoliamo per parti $\int \frac{\frac{1}{2}(x+2)}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x+2)dx = \int \left(\sqrt{x+1}\right)'(x+2) = (x+2)\sqrt{x+1} -$

$$-\int \sqrt{x+1}\,(1)dx = (x+2)\sqrt{x+1} - \int (x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx = (x+2)\sqrt{x+1} - \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= (x+2)\sqrt{x+1} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + c = (x+2)\sqrt{x+1} - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + c =$$

$= \sqrt{x+1}\left(x + 2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right) + c = \sqrt{x+1}\left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right) + c = \frac{1}{3}(x+4)\sqrt{x+1} + c$. Quindi:

$$A_2 = \int_0^3 \frac{\frac{1}{2}(x+2)}{\sqrt{x+1}}\, dx = \left[\frac{1}{3}(x+4)\sqrt{x+1}\right]_0^3 = \frac{7}{3}(2) - \frac{4}{3} = \frac{10}{3} \cong 3.33\ u^2$$

Pertanto l'area richiesta è:

$$A_1 + A_2 = \frac{2}{3} + \frac{10}{3} = 4\ u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria