LICEO SCIENTIFICO BOREALE 2 ORDINARIA 2024 - PROBLEMA 2

In figura, sono rappresentati i grafici della funzione esponenziale, con $x < 0$, e della funzione logaritmica, con $x > 1$, entrambe in base naturale.

a)

Determinare il polinomio di terzo grado $P(x)$ in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ P(x) & 0 \le x \le 1 \\ \ln(x) & x > 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

Deve essere: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Ricordiamo che una funzione razionale intera è definita, continua e derivabile su tutto R.

Per essere continua in $x = 0$ deve essere: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = P(0)$, quindi $\mathbf{1} = \boldsymbol{d}$.
Deve poi essere: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = P(1)$, quindi: $0 = a + b + c + 1$.

Per essere derivabile in $x = 0$, essendo la funzione continua, per il criterio di derivabilità è sufficiente che sia: $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$. Quindi: $\lim_{x\to 0^-} e^x = \lim_{x\to 0^+} (3ax^2 + 2bx + c)$, perciò: $\mathbf{1} = \boldsymbol{c}$.
Per essere derivabile in $x = 1$ deve essere $f'_+(1) = f'_-(1)$, $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 1^-} (3ax^2 + 2bx + c)$, da cui: $1 = 3a + 2b + c$, $1 = 3a + 2b + 1$, $3a + 2b = 0$. I valori di a e b si ottengono quindi risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 = a + b + c + 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 0 = a + b + 2 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} ; \begin{cases} a = -b - 2 \\ 3(-b - 2) + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow -b - 6 = 0;\ b = -6 ; \begin{cases} \boldsymbol{a} = \mathbf{4} \\ \boldsymbol{b} = -\mathbf{6} \end{cases}$$

Il polinomio richiesto ha quindi equazione: $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + x + 1$.

b)

Posto $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + x + 1$, dimostrare che ammette un ulteriore zero distinto da 1. Dopo aver determinato le ascisse dei punti stazionari e studiato la concavità, tracciare il grafico del polinomio completando il grafico γ rappresentativo della funzione f.

Dimostriamo che il polinomio ammette un ulteriore zero distino da 1.

Scomponendo il polinomio con la regola di Ruffini (sappiamo che una radice del polinomio è $x = 1$) si ottiene:

$$P(x) = 4x^3 - 6x^2 + x + 1 = (x-1)(4x^2 - 2x - 1)$$

Risulta $4x^2 - 2x - 1 = 0$ se $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$: quindi il polinomio ammette altri due zeri oltre ad $x = 1$ e sono: $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$, di cui solo UNO, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, appartiene all'intervallo $0 \le x \le 1$.

Determiniamo le ascisse dei punti stazionari.

La funzione polinomiale $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + x + 1$ è definita, continua e derivabile su tutto R, quindi le ascisse dei punti stazionari le troviamo annullando la derivata prima:

$$P'(x) = 12x^2 - 12x + 1 = 0 \ \ se\ x = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{12} = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{6}$$

Quindi, ci sono 2 punti stazionari, le cui ascisse sono: $\frac{3\pm\sqrt{6}}{6}$.

Studiamo la concavità del grafico.

$$P''(x) = 24x - 12 > 0 \ se\ x > \frac{1}{2}.$$

Quindi: il grafico volge la concavità verso l'alto se $x > \frac{1}{2}$ e verso il basso se $x < \frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$ è punto di flesso. $F = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ è flesso per la curva.

Studio del grafico della funzione polinomiale

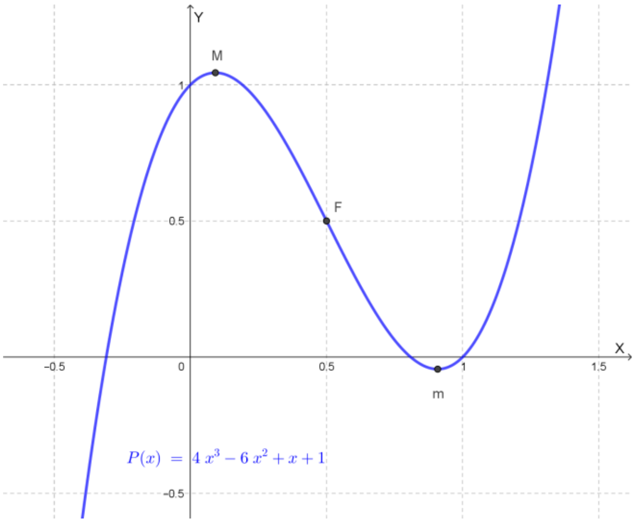
Oltre a quanto già detto, osserviamo che:

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (4x^3 - 6x^2 + x + 1) = \pm\infty.$$

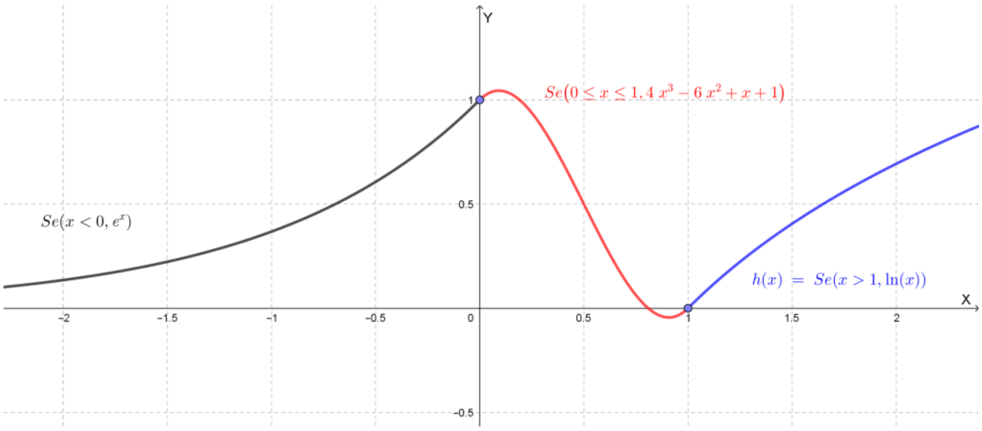
Non ci sono asintoti.

Studiamo la monotonia.
$P'(x) = 12x^2 - 12x + 1 > 0$ se $x < \frac{3-\sqrt{6}}{6}$ vel $x > \frac{3+\sqrt{6}}{6}$. Quindi il grafico è crescente per $x < \frac{3-\sqrt{6}}{6}$ vel $x > \frac{3+\sqrt{6}}{6}$ e decrescente per $\frac{3-\sqrt{6}}{6} < x < \frac{3+\sqrt{6}}{6}$. Pertanto $x = \frac{3-\sqrt{6}}{6}$ è un punto di massimo relativo e $x = \frac{3+\sqrt{6}}{6}$ un punto di minimo relativo.

Tenendo presente lo studio della concavità già effettuato, il grafico risulta il seguente:



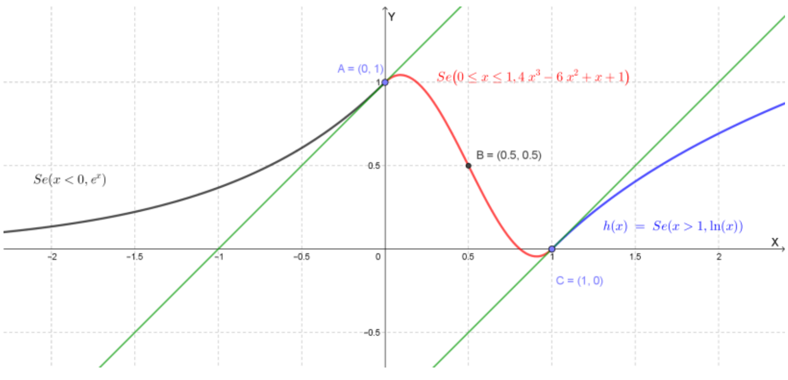
Il grafico γ della funzione f si completa quindi nel modo seguente:



c)

Indicato con B il punto di flesso di $P(x)$ e con A e C i punti di ascisse, rispettivamente, $x = 0$ e $x = 1$, dimostrare che B è il centro di simmetria dell'arco di estremi A e C. Verificare che le rette tangenti a γ, nei punti A e C, sono parallele.

Rappresentiamo graficamente i dati forniti:



Dimostriamo che B è il centro di simmetria dell'arco di estremi A e C.

La proprietà richiesta vale per tutte le cubiche: il flesso è centro di simmetria per una cubica.

Dimostriamolo esplicitamente nel nostro caso.

La simmetria di centro $(a; b)$ ha equazioni:

$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$; *da cui*: $\begin{cases} x = 2a - x' \\ y = 2b - y' \end{cases}$

La simmetria di centro $B = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ha equazioni:

$\begin{cases} x = 1 - x' \\ y = 1 - y' \end{cases}$; $\begin{cases} x \to 1 - x \\ y \to 1 - y \end{cases}$

Cerchiamo l'equazione della curva simmetrica rispetto a B della curva di equazione:

$y = P(x) = 4x^3 - 6x^2 + x + 1$

$1 - y = 4(1 - x)^3 - 6(1 - x)^2 + (1 - x) + 1 = \cdots = -4x^3 + 6x^2 - x$; dacui:

$-y = -4x^3 + 6x^2 - x - 1 \Rightarrow y = 4x^3 - 6x^2 + x + 1 = P(x)$

Questo dimostra che B è centro di simmetria per il grafico di P(x), quindi anche dell'arco di estremi A e C, che sono simmetrici rispetto a B (come si può facilmente osservare sia graficamente che utilizzando le equazioni della simmetria $\begin{cases} x \to 1 - x \\ y \to 1 - y \end{cases}$.

Verifichiamo ora che le rette tangenti a γ, nei punti A e C, sono parallele.

Ricordando la funzione f il cui grafico è γ è derivabile in $x = 0$ e $x = 1$, risulta:

$f'(0) = D(e^x)_{x=0} = (e^x)_{x=0} = 1 = m(tangente\ in\ A)$

$f'(1) = D(\ln x)_{x=1} = \left(\frac{1}{x}\right)_{x=1} = 1 = m(tangente\ in\ C)$

Quindi, essendo $f'(0) = f'(1) = 1$ le due tangenti sono parallele.

d)

Scrivere l'equazione della retta t, tangente al grafico γ, nel punto B di ascissa $\frac{1}{2}$. Verificare che t non ha ulteriori punti in comune con γ. Determinare l'area della regione finita di piano delimitata da t, da γ e dalla retta di equazione $x = \frac{3}{2}$.

La retta t è la tangente nel flesso $B = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. B appartiene al grafico di $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + x + 1$ quindi, essendo $P'(x) = 12x^2 - 12x + 1$, il coefficiente angolare della tangente t è $P'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - 6 + 1 = -2$

La retta t ha quindi equazione: $y - \frac{1}{2} = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)$; $y = -2x + \frac{3}{2}$.

Verifichiamo che t non ha ulteriori punti in comune con γ.

Osserviamo che la retta tangente taglia l'asse delle ordinate in $y = \frac{3}{2}$, quindi, $per\ x < 0$, il suo grafico sta al di sopra del grafico di $y = e^x$: la tangente non ha intersezioni con γ per $x < 0$. Inoltre, se $x = 1$ la retta ha ordinata $-\frac{1}{2}$, mentre la funzione logaritmica ha ordinata nulla: la tangente non ha intersezioni con γ per

$x > 1$.

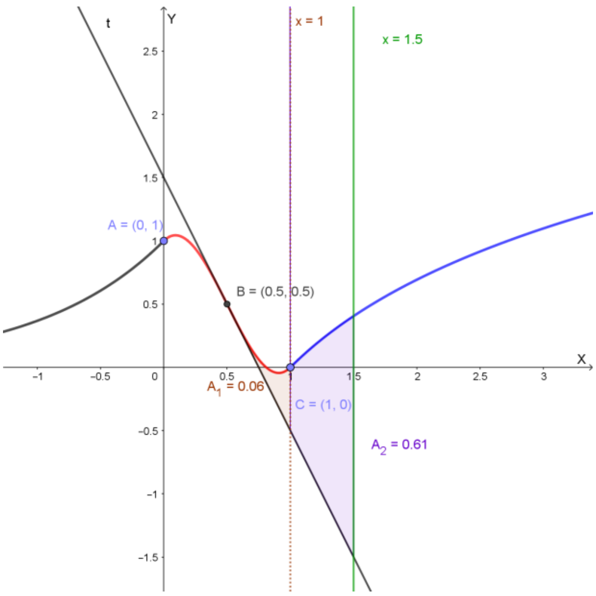
Verifichiamo che la tangente ha solo B come intersezione con γ per $0 \leq x \leq 1$, risolvendo il seguente sistema:

$\begin{cases} y = -2x + \frac{3}{2} \\ y = 4x^3 - 6x^2 + x + 1 \end{cases}$: $4x^3 - 6x^2 + x + 1 = -2x + \frac{3}{2}$; $4x^3 - 6x^2 + 3x - \frac{1}{2} = 0$; cioè:

$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 0$, $(2x-1)^3 = 0$: abbiamo la sola radice $x = \frac{1}{2}$ (che è tripla, a conferma che $x = \frac{1}{2}$ è $punto\ di\ flesso$).

Determiniamo ora l'area della regione finita di piano delimitata da t, da γ e dalla retta di equazione $x = \frac{3}{2}$.

Rappresentiamo la regione richiesta:



La regione è compresa fra le curve di equazione $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + x + 1$ e t: $y = -2x + \frac{3}{2}$ tra $\frac{1}{2}$ e 1 mentre è compresa fra le curve di equazione $y = \ln(x)$ e t: $y = -2x + \frac{3}{2}$ fra 1 e $\frac{3}{2}$. Pertanto:

$A = A_1 + A_2$.

$$A_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[4x^3 - 6x^2 + x + 1 - \left(-2x + \frac{3}{2}\right)\right] dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[4x^3 - 6x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right] dx =$$

$$= \left[x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \cdots = \frac{1}{16}\ u^2 = A_1$$

$$A_2 = \int_1^{\frac{3}{2}} \left[\ln(x) - \left(-2x + \frac{3}{2}\right)\right] dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \left[\ln(x) + 2x - \frac{3}{2}\right] dx$$

Cerchiamo una primitiva di ln (x) integrando per parti:

$$\int \ln(x)\, dx = \int (\mathrm{x})' \ln(x)\, dx = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln(x) - x + c$$

Quindi:

$$A_2 = \int_1^{\frac{3}{2}} \left[\ln(x) + 2x - \frac{3}{2}\right] dx = \left[x\ln(x) - x + x^2 - \frac{3}{2}x\right]_1^{\frac{3}{2}} = \cdots = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{27}{8}\right)\ u^2 = A_2$$

L'area richiesta è quindi: $A = A_1 + A_2 = \left[\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{27}{8}\right)\right]\ u^2 \cong (0.06 + 0.61)\ u^2 \cong 0.67\ u^2$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria