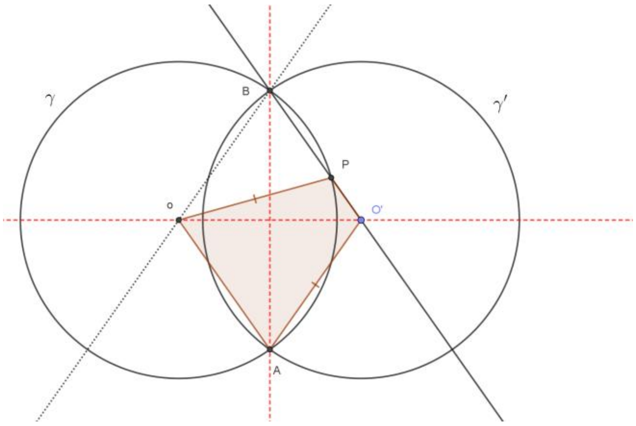
LICEO SCIENTIFICO BOREALE 2 ORDINARIA 2024 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

Si considerino due circonferenze congruenti γ e γ', di centri rispettivamente O e O', le quali si intersecano nei punti A e B. Indicato con P il punto di intersezione della retta BO', distinto da B, con la circonferenza γ, dimostrare che il quadrilatero $PO'AO$ è inscrivibile in una circonferenza.



Per essere inscrittibile in una circonferenza un quadrilatero deve avere gli angoli opposti supplementari. E' sufficiente dimostrare che gli angoli opposti AOP e PO'A sono supplementari.

Osserviamo che il quadrilatero AOBO' è un rombo, perché tutti i suoi lati sono uguali al raggio R delle due circonferenze congruenti, quindi la retta BO' è parallela alla retta AO. Pertanto il quadrilatero $PO'AO$ è un trapezio (avendo i lati PO' ed OA paralleli), ed è anche isoscele essendo i lati obliqui OP ed AO' congruenti (sono uguali al raggio delle circonferenze congruenti). Essendo PO'AO un trapezio isoscele, come tutti i trapezi isosceli è inscrittibile in una circonferenza. Infatti gli angoli AOP e OPO' sono supplementari. Ma OPO' è congruente a PO'A (perché il trapezio è isoscele), quindi:

gli angoli AOP e PO'A sono supplementari: ciò dimostra che il quadrilatero PO'AO è inscrittibile in una circonferenza.

QUESITO 2

Si consideri una scatola contenente 9 palline, di cui 6 bianche e 3 nere. Si estraggono le palline una ad una senza reinserimento finché non siano estratte 4 palline bianche. Qual è la probabilità che siano necessarie esattamente 4 estrazioni? Qual è la probabilità che siano necessarie esattamente 6 estrazioni?

La probabilità di avere 4 palline bianche nelle prime 4 estrazione è data da:

$$p(prime\ 4\ bianche) = p(prima\ bianca) \cdot p(seconda\ bianca) \cdot p(terza\ bianca) \cdot p(quarta\ bianca)$$

$$p(prime\ 4\ bianche) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{42} \cong 0.119 = 11.9\ \%$$

Allo stesso risultato si può arrivare ragionando in termini di casi favorevoli (f) e casi possibili (n).

I casi favorevoli sono dati dalle possibili quaterne che si possono fare con 6 palline bianche, quindi le combinazioni di 6 oggetti 4 a 4: $f = C_{6,4} = \binom{6}{4} = 15$.

I casi possibili sono dati dalle possibili quaterne che si possono fare con 9 oggetti, quindi le combinazioni di 9 oggetti 4 a 4: $n = C_{9,4} = \binom{9}{4} = 126$.

Quindi:

$$p(prime\ 4\ bianche) = \frac{15}{126} = \frac{5}{42} \cong 0.119 = 11.9\ \%$$

Calcoliamo ora *qual è la probabilità che per estrarre 4 palline bianche siano necessarie esattamente 6 estrazioni.*

Affinché si verifichi ciò è necessario che si verifichi l'evento A:"ci siano 3 palline bianche nelle prime 5 estrazioni (quindi 2 nere)" e contemporaneamente l'evento B: "la sesta pallina estratta è bianca".

Calcoliamo la probabilità di A.

Le scelte delle 3 palline bianche sono date da: $C_{6,3} = \binom{6}{3} = 20$.
Le scelte delle 2 palline nere sono date da: $C_{3,2} = \binom{3}{2} = 3$.

I casi favorevoli al verificarsi di A sono quindi $20 \cdot 3 = 60$.

(osserviamo che il numero dei casi favorevoli si può anche calcolare come numero di estrazioni simultanee di 5 palline, da un'urna con 6 bianche e 3 nere, in modo che nella cinquina ci siano 3 palline bianche e 2 nere: $C_{6,3} \cdot C_{3,2}$).

I casi possibili per l'evento A sono il numero delle cinquine che si possono fare con 9 oggetti:

$$C_{9,5} = \binom{9}{5} = 126.$$

Quindi: $p(A) = \frac{60}{126}$.

la probabilità che ci siano 3 bianche e 2 nere nelle prime 5 estrazioni è data da: $\frac{60}{126}$.

Calcoliamo la probabilità che si verifichi l'evento B.

Dopo il verificarsi di A sono rimaste 4 palline di cui 3 palline bianche, quindi:

$$p(B) = \frac{3}{4}.$$

La probabilità che siano necessarie esattamente 6 estrazioni per avere 4 palline bianche è data perciò da:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{60}{126} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{14} \cong 0.357 = 35.7\ \%.$$

N.B.

Possiamo ragionare anche in questo modo: il numero delle "sestine" favorevoli è dato da: $C_{6,3} \cdot C_{3,2} \cdot 3$. Il numero delle "sestine" possibili è dato da: $C_{9,5} \cdot 4$. Quindi:

$$p = \frac{C_{6,3} \cdot C_{3,2} \cdot 3}{C_{9,5} \cdot 4} = \cdots = \frac{5}{14} \cong 0.357 = 35.7\ \%.$$

QUESITO 3

Nello spazio cartesiano Oxyz sono assegnati i punti A(2,0,2), B(2,-1,0), C(-2,0,3), D(0,0,3).Verificare che le rette AB e CD sono sghembe e determinare l'equazione del piano α passante per AB e perpendicolare alla retta CD.

Retta AB:

parametri direttori $(2-2;\ -1-0; 0-2) = (0;\ -1;\ -2)$. Quindi:

$$AB: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Retta CD:

parametri direttori $(0+2;\ 0-0; 3-3) = (2;\ 0;\ 0)$. Quindi:

$$CD: \begin{cases} x = x_0 + lk \\ y = y_0 + mk \\ z = z_0 + nk \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = -2 + 2k \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

AB e CD non sono parallele perché i loro parametri direttori $(0;\ -1;\ -2)$ e $(2;\ 0;\ 0)$ non sono proporzionali.

Dimostriamo che non sono incidenti:

$$\begin{cases} 2 = -2 + 2k \\ -t = 0 \\ 2 - 2t = 3 \end{cases}; \begin{cases} 2 = k \\ t = 0 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}: sistema\ impossibile.\ Le\ due\ rette\ non\ sono\ incidenti.$$

Quindi le due rette sono sghembe (cioè non sono complanari, perché per essere complanari dovrebbero essere parallele o incidenti).

Determiniamo l'equazione del piano α passante per AB e perpendicolare alla retta CD.

Tale piano, per essere perpendicolare a CD, deve avere come parametri direttori della normale (i coefficienti a, b e c dell'equazione $ax + by + cz + d = 0$)gli stessi di CD: $(2;\ 0;\ 0)$.
L'equazione del piano è quindi del tipo:

$\alpha: 2x + d = 0.$

Dovendo contenere la retta AB, deve contenere A e B, quindi, ricordando che $A(2,0,2), B(2,-1,0)$:

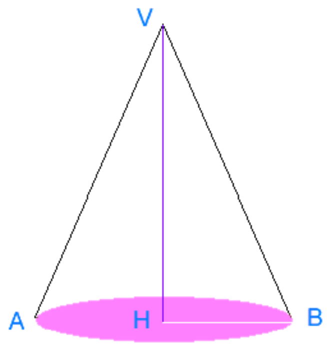
$$\begin{cases} 4+d=0 \\ 4+d=0 \end{cases} : d=-4.$$

Il piano richiesto ha quindi equazione:

$$\alpha: 2x-4=0;\ \ x=2.$$

QUESITO 4

Fra tutti i coni aventi area totale uguale ad S, determinare quello avente volume massimo.



Sia $\overline{VH}=h$ l'altezza, $\overline{VB}$=a l'apotema e $\overline{BH}=R$ il raggio di base. Risulta:

$$S=\pi Ra+\pi R^2=costante$$

Il volume V è dato da: $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$, con $a^2=R^2+h^2$.
Ponendo $R=x$, con $x>0$, otteniamo: $a=\frac{S-\pi R^2}{\pi R}=\frac{S-\pi x^2}{\pi x}$. Quindi si ha:

$h=\sqrt{a^2-R^2}=\sqrt{\left(\frac{S-\pi x^2}{\pi x}\right)^2-x^2}=\cdots=\sqrt{\frac{S(S-2\pi x^2)}{\pi^2 x^2}}$. Pertanto:

$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{\frac{S(S-2\pi x^2)}{\pi^2 x^2}}=massimo\ se\ lo\ è\ z=x^2\sqrt{\frac{S(S-2\pi x^2)}{\pi^2 x^2}}$ (con $x>0$)

Essendo $z>0$, il suo valore è massimo quando lo è il suo quadrato $y=z^2$. Perciò dobbiamo massimizzare la quantità:

$y=x^4\left[\frac{S(S-2\pi x^2)}{\pi^2 x^2}\right]=\frac{x^2 S(S-2\pi x^2)}{\pi^2}$ che è massima (essendo $\frac{S}{\pi^2}$ $una\ costante\ positiva$) se lo è:

$w=x^2(S-2\pi x^2)=Sx^2-2\pi x^4$. Studiamo la derivata prima:

$w'=2Sx-8\pi x^3>0$ se $2x(S-4\pi x^2)>0$. Essendo $x>0$, risulta $w'>0\ se\ S-4\pi x^2>0$ e ciò avviene se:

$-\sqrt{\frac{S}{4\pi}}<x<\sqrt{\frac{S}{4\pi}}$, quindi per $0<x<\sqrt{\frac{S}{4\pi}}$.

Pertanto w cresce se $0 < x < \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$ e decresce se $x > \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$ e si annulla se $x = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$ che è punto di massimo relativo ed anche assoluto.

Il volume massimo del cono di data superficie S è quello il cui raggio di base è dato da $R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

N.B.

Per tale valore di R si ha: $h = \sqrt{\frac{S(S-2\pi x^2)}{\pi^2 x^2}} = \sqrt{\frac{S\left(S-2\pi\cdot\frac{S}{4\pi}\right)}{\pi^2\frac{S}{4\pi}}} = \sqrt{\frac{\frac{S^2}{2}}{\frac{S}{4\pi}}} = \sqrt{\frac{S^2}{2}\cdot\frac{4}{\pi S}} = 2\sqrt{\frac{S}{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} =$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}\right) = 2\sqrt{2}\,R.$

Quindi:

il volume massimo del cono di data superficie S è quello la cui altezza h è legata al raggio di base R dalla relazione: $h = 2R\sqrt{2}$.

QUESITO 5

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to\infty} x[\ln(x+1) - \ln(x)]$$

Il dominio della funzione $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x>0 \end{cases};\ \begin{cases} x>-1 \\ x>0 \end{cases}:\ x>0$$

Essendo il dominio $x > 0$, il limite è da intendersi per $x \to +\infty$. Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} x[\ln(x+1) - \ln(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\frac{x+1}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln(e) = 1$$

QUESITO 6

Determinare i valori del parametro reale k per cui la curva $y = e^{2x} - 8e^x + k$ non ha punti nel semipiano $y < 0$.

Dobbiamo trovare i valori di k per i quali risulta: $e^{2x} - 8e^x + k \geq 0$ per ogni x.
Posto $e^x = t$ abbiamo: $t^2 - 8t + k \geq 0$. Dobbiamo trovare i valori k per i quali questa disequazione è sempre soddisfatta, ciò equivale a dire che dobbiamo trovare i valori k per i quali il discriminante di questa disequazione è negativo o nullo. Risulta:
$\frac{\Delta}{4} = 16 - k \leq 0\ se\ \ k \geq 16.$

Quindi: *la curva $y = e^{2x} - 8e^x + k$ non ha punti nel semipiano $y < 0$ per $k \geq 16$.*

QUESITO 7

Sono date $f(x)=\frac{x-3}{x-1}$ e $g(x)=\frac{x+1}{1-x}$. Calcola $f'(x)$ e $g'(x)$. Confronta e commenta il risultato ottenuto.

Calcoliamo le due derivate richieste.

$f'(x)=\frac{1(x-1)-(x-3)(1)}{(x-1)^2}=\frac{2}{(x-1)^2}\ (x\neq 1)$

$g'(x)=\frac{1(1-x)-(x+1)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{2}{(x-1)^2}\quad (x\neq 1)$

Le due funzioni hanno lo stesso dominio $(x\neq 1)$ e la stessa derivata in ogni punto del dominio. Quindi differiscono per una costante (Corollario del Teorema di Lagrange).

Verifichiamo direttamente che le due funzioni differiscono per una costante:

$$f(x)-g(x)=\frac{x-3}{x-1}-\frac{x+1}{1-x}=\frac{x-3}{x-1}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{2x-2}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}=2\quad per\ (x\neq 1)$$

QUESITO 8

Nel canto 28 del Paradiso di Dante si legge «l'incendio suo seguiva ogne scintilla ed eran tante, che 'l numero loro più che il doppiar de li scacchi s'inmilla». In questi versi, il poeta fa riferimento a un fenomeno di crescita descritto dalla funzione $f(x)=a^x$. Per quali valori di a la funzione è definita e continua su $\mathbb{R}$? Esistono valori di a in corrispondenza dei quali f non è invertibile? Motivare la risposta.

Diamo il significato del testo riportato (per approfondimenti vedi: La matematica nella "Divina Commedia" - Treccani):

*Ogni angelo (**scintilla**) continuava a girare (**seguiva**) insieme al suo cerchio infuocato (**L'incendio suo**); e il **loro numero** era così alto (**eran tante**) che si moltiplicava (**s'inmilla**) più che la progressiva duplicazione (**più** che **'l doppiar**) degli **scacchi**.*

L'episodio a cui fa riferimento Dante in questi versi è tratto da una leggenda orientale secondo la quale l'inventore degli scacchi (Sissa Nassir) chiese al re di Persia, in premio per la sua invenzione, un chicco di grano (qualcuno dice riso) per la prima casellina della scacchiera, due per la seconda, quattro per la terza, e così via: il re, dopo aver accettato con un sorriso di scherno la richiesta, si rese conto, dopo i calcoli fatti dai matematici della sua corte, che nemmeno tutti i granai del suo regno sarebbero bastati ad accontentare la richiesta! (http://www.batmath.it/dantematica/inmilla/inmilla.htm)

Le caselle della scacchiera sono 64, quindi il numero dei chicchi di grano richiesti è dato da:

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{63} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{63}$$

Si tratta della somma di 64 termini di una progressione geometrica di ragione 2 con primo termine 2^0. Ricordiamo che la somma dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione q è data da:

$S_n = a_1 \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$

Nel nostro caso si ha: $S_n = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615.$

Questo numero è incredibilmente alto, tanto che non sarebbe bastato tutto il grano (o riso) prodotto sulla Terra per soddisfare la richiesta di Sissa Nassir!

Dopo questa doverosa introduzione storica, veniamo alla richiesta del quesito, che, in realtà, ha un debole legame con la citazione. Sarebbe stata più pertinente una domanda legate alle progressioni geometriche, come quella posta nel Quesito 1 della maturità PNI 2006.

https://www.matefilia.it/maturita/spe2006/spe2006.pdf

Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a *casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.*

(Qui la soluzione: https://www.matefilia.it/maturita/spe2006/pni-2006-quesiti.pdf)

Soluzione quesito.

Si consideri la funzione $f(x) = a^x$. *Per quali valori di* a *la funzione è definita e continua su* $\mathbb{R}$*? Esistono valori di* a *in corrispondenza dei quali* f *non è invertibile? Motivare la risposta.*

La funzione $y = f(x) = a^x$ è definita e continua su $\mathbb{R}$ per $a > 0$, perché la potenza a^x è definita in $\mathbb{R}$ (cioè per valori generici di x) solo per $a > 0$.

La funzione è invertibile per ogni valore di $a > 0$ con $a \neq 1. Per\ a = 1$ infatti la funzione ha equazione $y = 1$, che non è invertibile, non essendo iniettiva.

La funzione $f(x) = a^x$ è definita e continua su $\mathbb{R}$ per $a > 0$.
La funzione non è invertibile per $a = 1$.
E' invertibile per $a > 0$ con $a \neq 1$ e la sua funzione inversa è la funzione logaritmica:
$x = f^{-1}(y) = \log_a y \quad \Rightarrow \quad y = \log_a x.$

Con la collaborazione di Angela Santamaria