LICEO SCIENTIFICO STRAORDINARIA 2024 - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione $f(x) = e^{-x^2}$.

a)

Tracciare, nel medesimo sistema di riferimento, il grafico γ_1 della funzione $f(x)$ e il grafico γ_2 della sua funzione derivata, individuando i loro asintoti, estremi e flessi. Successivamente scrivere le coordinate del punto P in cui γ_1 e γ_2 si intersecano.

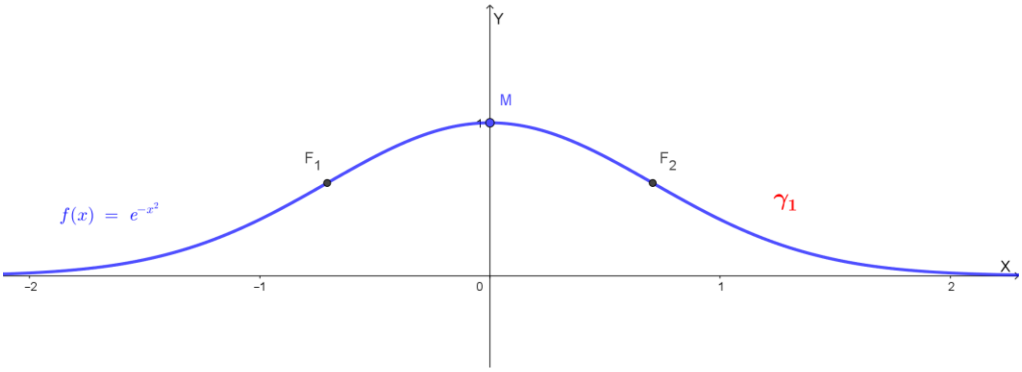
$\boldsymbol{y = f(x) = e^{-x^2}}$

- La funzione è definita, continua e derivabile su tutto R.
- La funzione è pari, essendo $f(-x) = f(x)$, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.
- Non interseca l'asse delle ascisse, perché e^{-x^2} non si annulla mai. Interseca l'asse delle ordinate nel punto (0; 1).
- La funzione è sempre positiva, essendo $e^{-x^2} > 0$ per ogni x (grafico tutto al di sopra dell'asse x).
- Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio: $\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0^+$ (l'asse delle x è asintoto orizzontale).
- Studio della derivata prima: $y' = -2xe^{-x^2} = 0$ per $x = 0$ $(punto\ stazionario)$.

  $y' > 0\ se\ = -2xe^{-x^2} > 0 :\ x < 0$. Quindi il grafico è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$; pertanto $x = 0$ è punto di massimo relativo (ed assoluto), $M = (0; 1)$.
- Studio della derivata seconda: $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(-1 + 2x^2) > 0\ se$:

  $-1 + 2x^2 > 0,\ x^2 > \frac{1}{2}:\ x < -\frac{\sqrt{2}}{2}\ vel\ x > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Quindi il grafico volge la concavità verso l'alto per $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}\ vel\ x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ e verso il basso per $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pertanto $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ sono punti di flesso. Essendo $f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}}$, i flessi hanno coordinate: $F_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $F_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Il grafico γ_1 della funzione f è quindi il seguente:



Dal grafico di $f(x)$ possiamo dedurre in parte il grafico di $y = g(x) = f'(x) = -2xe^{-x^2}$.

- Questa funzione è definita, continua e derivabile su tutto R.

- Si tratta di una funzione dispari (essendo la derivata di una funzione pari), quindi il suo grafico γ_2 è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani.

- Interseca l'asse delle ascisse e l'asse delle ordinate solo nel punto (0; 0).

- La funzione è positiva dove il grafico di f è crescente, quindi per $x < 0$, ed è negativa per $x > 0$.

- Si annulla nei punti stazionari di f, quindi in $x = 0$.

- I limiti agli estremi del dominio sono i seguenti: $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (-2xe^{-x^2}) = 0^{\mp}$ (basta osservare l'andamento della tangente al grafico di f) per $x \to \pm\infty$ (tali limiti si possono anche calcolare direttamente). Quindi $g = f'$ ha l'asse delle x come asintoto orizzontale.

- Risulta $g'(x) = f''(x) = 2e^{-x^2}(-1 + 2x^2) > 0$ dove il grafico di f volge la concavità verso l'alto, quindi per $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *vel* $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$: in tali intervalli il grafico di f' è crescente. Risulta invece $g'(x) = f''(x) = 2e^{-x^2}(-1 + 2x^2) < 0$ dove il grafico di f volge la concavità verso il basso, quindi per $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$: in tale intervallo il grafico di f' è decrescente. Qui il grafico di $g = f'$ ha un massimo relativo per $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ed un minimo relativo per $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Essendo $g = f' = -2xe^{-x^2}$ risulta:
$g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}}$ e $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}}$
pertanto il massimo ed il minimo relativi di $g = f'$ hanno coordinate: $M_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}}\right)$ ed $m_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

- Studiamo infine la derivata seconda di $g = f'$.

$$g''(x) = D\left(2e^{-x^2}(-1 + 2x^2)\right) = -4xe^{-x^2}(-1 + 2x^2) + 2e^{-x^2}(4x) = 4xe^{-x^2}(1 - 2x^2 + 2) =$$
$$= 4x(3 - 2x^2)e^{-x^2} > 0 \ \ se \ \ x(3 - 2x^2) > 0.$$

Tale disequazione è verificata per: $x < -\sqrt{\frac{3}{2}}$ vel $0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$. In tali intervalli il grafico di f' volge la concavità verso l'alto, mentre per $-\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 0 \;\; vel \;\; x > \sqrt{\frac{3}{2}}$ volge la concavità verso il basso.

La funzione $g = f'$ ha quindi tre punti di flesso: $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = 0 \; e \;\; x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

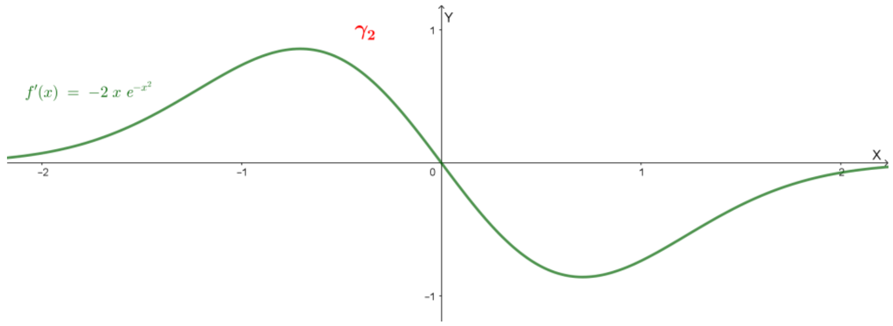
Ricordando che $g(x) = f'(x) = -2xe^{-x^2}$, le ordinate dei flessi sono quindi:

$$g\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = f'\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -2\sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{3}{2}}\,, \qquad g(0) = 0,\;\; g\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = f'\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 2\sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{3}{2}}$$

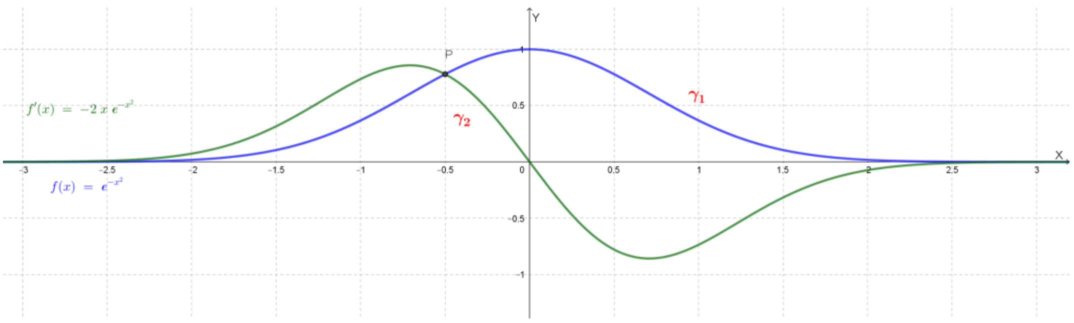
I flessi di g hanno quindi le seguenti coordinate: $F_3 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}};\; -2\sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{3}{2}}\right)$, $F_4 = (0;0)$,

$F_5 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}};\; 2\sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{3}{2}}\right)$.

Il grafico γ_2 di $g = f'$ è quindi il seguente:



Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano i grafici di $f \; ed \; f'$:



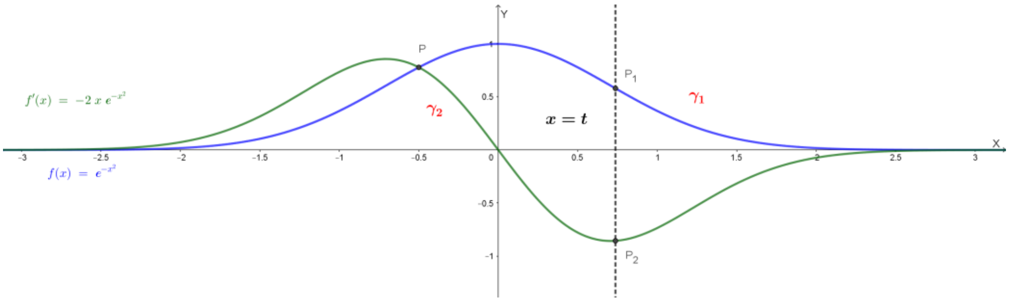
Cerchiamo infine le coordinate del punto P di intersezione fra i due grafici:

$$\begin{cases} y = e^{-x^2} \\ y = -2xe^{-x^2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = e^{-x^2} \\ e^{-x^2} = -2xe^{-x^2} \;\Rightarrow 1 = -2x;\;\; x = -\frac{1}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = e^{-\frac{1}{4}} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\boldsymbol{P = \left(-\frac{1}{2};\; e^{-\frac{1}{4}}\right) \cong (-0.5;\; 0.8)}$

b)

La retta di equazione $x = t,\ t \in \mathbb{R}$, incontra γ_1 e γ_2, rispettivamente, nei punti P_1 e P_2.
Determinare il valore del parametro t, in modo che la misura del segmento che unisce i due punti abbia misura massima e calcolare il valore di tale misura.



Calcoliamo la distanza P_1P_2.

$$d = \overline{P_1P_2} = |y_{P_1} - y_{P_2}| = |e^{-x^2} - (-2xe^{-x^2})| = |e^{-x^2} + 2xe^{-x^2}| = e^{-x^2}|1 + 2x|$$

Analizziamo i casi con $x > -\frac{1}{2}$ e $x < -\frac{1}{2}$ $\left(per\ \ x = -\frac{1}{2}\ la\ distanza\ \text{è}\ nulla\right)$
Se $x > -\frac{1}{2}$: $d = e^{-x^2}(1 + 2x)$
$d' = -2xe^{-x^2}(1 + 2x) + 2e^{-x^2} \geq 0\ \ se\ \ 2e^{-x^2}(-x - 2x^2 + 1) \geq 0, -2x^2 - x + 1 \geq 0,$

$2x^2 + x - 1 \leq 0$: $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Perciò in questo caso $d' \geq 0$ *se*:

$$\begin{cases} x > -\dfrac{1}{2} \\ -1 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} :\ \ -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$$

Quindi d è crescente se $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ e decrescente per $x > \frac{1}{2}$: d è massima se $x = \frac{1}{2}$
Se $x < -\frac{1}{2}$: $d = e^{-x^2}(-1 - 2x)$ quindi $d' = -2e^{-x^2}(-x - 2x^2 + 1) \geq 0\ \ se\ \ 2x^2 + x - 1 \geq 0$ cioè se:
$x \leq -1\ \ vel\ \ x \geq \frac{1}{2}$. Perciò in questo caso $d' \geq 0$ *se*:

$$\begin{cases} x < -\dfrac{1}{2} \\ x \leq -1\ \ vel\ \ x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} :\ \ x \leq -1$$

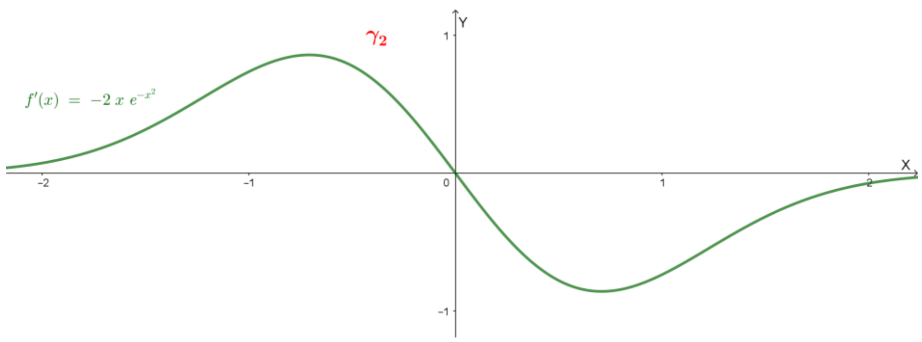
Quindi d è crescente se $x < -1$ e decrescente per $-1 < x < -\frac{1}{2}$: d è massima se $x = -1$
Quando $x > -\frac{1}{2}$ $d = e^{-x^2}(1 + 2x)$ ed il suo valore massimo è $d\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{\left(-\frac{1}{4}\right)} \cong 0.65$
Quando $x < -\frac{1}{2}$ $d = -e^{-x^2}(1 + 2x)$ ed il suo valore massimo è $d(-1) = e^{-1} \cong 0.37$

La distanza $\overline{P_1P_2}$ è quindi massima per $t = \frac{1}{2}$ ed il suo valore massimo è $2e^{\left(-\frac{1}{4}\right)} \cong 0.65$

c)

Sia γ_3 il grafico rappresentativo della funzione $f''(x)$. Calcolare l'area della regione finita delimitata da γ_2 e γ_3 .

Osserviamo che $f''(x) = 2e^{-x^2}(-1+2x^2)$ è la funzione derivata di $g(x) = f'(x) = -2xe^{-x^2}$, il suo studio qualitativo può essere dedotto dal grafico di $f'(x)$, che riportiamo per comodità.



Poniamo per semplicità $h(x) = f''(x) = 2e^{-x^2}(-1+2x^2)$

- Questa funzione è definita, continua e derivabile su tutto R.

- Si tratta di una funzione pari (essendo la derivata di una funzione dispari), quindi il suo grafico γ_3 è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

- Interseca l'asse delle ascisse nei punti di massimo e minimo relativi di $f'(x)$ (dove si annulla la sua derivata, che è appunto $f''(x)$) quindi per $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

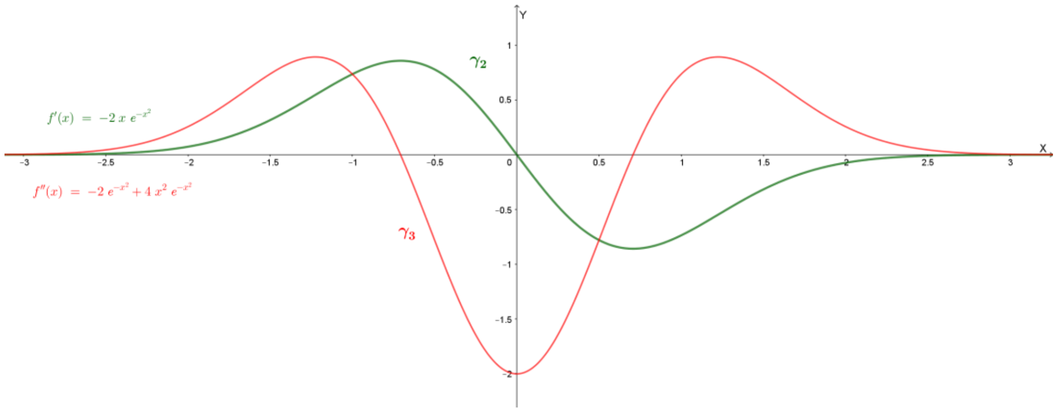
- Interseca l'asse delle ordinate in $y = -2$ (ponendo $x = 0$ in $2e^{-x^2}(-1+2x^2)$).

- La funzione è positiva dove il grafico di f' è crescente, quindi per $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ vel $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, ed è negativa per $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- I limiti agli estremi del dominio sono i seguenti: $\lim_{x\to\pm\infty} f''(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2e^{-x^2}(-1+2x^2) = 0^+$ (basta osservare l'andamento della tangente al grafico di f' per $x \to \pm\infty$) (tali limiti si possono anche calcolare direttamente). Quindi $h = f''$ ha l'asse delle x come asintoto orizzontale.

- Osservando che la derivata prima di $f''(x)$ è la derivata seconda di $f'(x) = g(x)$, possiamo dedurre che $f''(x)$ è crescente dove $g''(x) > 0$. Cioè dove il grafico di g volge la concavità verso l'alto, quindi per $x < -\sqrt{\frac{3}{2}}$ vel $0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$. Invece $f''(x)$ è decrescente per $-\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 0$ vel $x > \sqrt{\frac{3}{2}}$. La funzione $f''(x)$, che è pari, ha quindi due massimi relativi (ed anche assoluti) per $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ ed un minimo relativo (ed anche assoluto) per $x = 0$.
  Notiamo che gli estremanti di $f''(x)$ sono i punti di flesso di $f'(x)$.

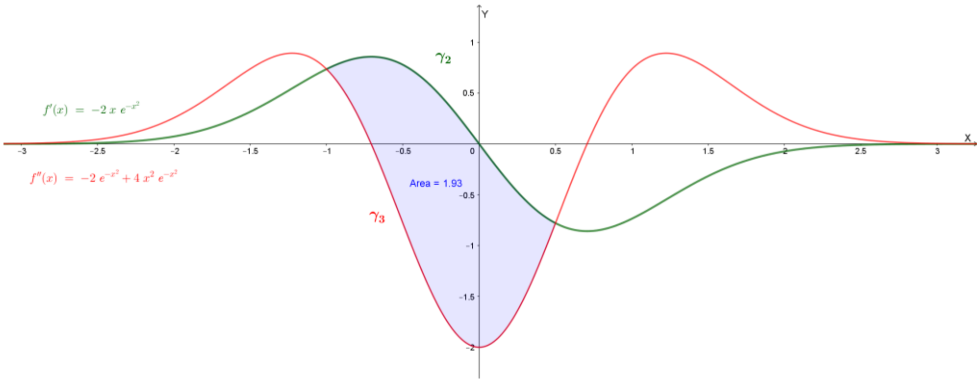
Il grafico qualitativo di $f''(x)$ è quindi il seguente (abbiamo anche inserito il grafico di $f'(x)$):



Per calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da γ_2 e γ_3 dobbiamo cercare le ascisse delle due intersezioni fra i grafici.

$$\begin{cases} y = f'(x) = -2xe^{-x^2} \\ y = f''(x) = 2e^{-x^2}(-1+2x^2) \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = -2xe^{-x^2} \\ -2xe^{-x^2} = 2e^{-x^2}(-1+2x^2) \end{cases} \Rightarrow -x = -1 + 2x^2$$

$$-x = -1 + 2x^2 ; \quad 2x^2 + x - 1 = 0 : \ x = -1 , \qquad x = \frac{1}{2}$$



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} [f'(x) - f''(x)]\, dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left[-2xe^{-x^2} - 2e^{-x^2}(-1+2x^2)\right] dx =$$
$$= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left[-2e^{-x^2}(x - 1 + 2x^2)\right] dx.$$

Non è semplice trovare una primitiva di $-2e^{-x^2}(x-1+2x^2)$. Ragioniamo in modo diverso, ricordando che la derivata di una differenza è la differenza delle derivate.

$$\int [f'(x) - f''(x)]\, dx = \int [f(x) - f'(x)]'\, dx = f(x) - f'(x) + c = e^{-x^2} - \left(-2xe^{-x^2}\right) + c =$$
$$= e^{-x^2}(1+2x) + c.$$

Quindi una primitiva di $[f'(x) - f''(x)]$ è $e^{-x^2}(1+2x)$. Pertanto si ha:

$$Area = \left[e^{-x^2}(2x+1)\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = 2e^{-\frac{1}{4}} + e^{-1} \cong 1.93$$

d)

Posto $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, *calcolare il* $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{f'(x)}$ *spiegando perché, in* $x = 0$, *le funzioni* $F(x)$ *ed* $f'(x)$ *sono infinitesime dello stesso ordine.*

Ricordiamo che $f(x) = e^{-x^2}$ ed $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. Inoltre, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, $F(x)$ è continua e derivabile su tutto R e risulta $F'(x) = e^{-x^2}$.

Risulta poi $F(0) = 0$ ed $f'(0) = 0$, il limite si presenta quindi nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

F ed f' sono continue e derivabili su tutto R ed esiste un intorno dello zero, zero escluso, in cui la derivata di f', che è $f''(x) = 2e^{-x^2}(-1+2x^2)$, non si annulla. Possiamo quindi applicare il teorema di De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{f''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}}{2e^{-x^2}(-1+2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2(-1+2x^2)} = -\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{f'(x)}.$$

Le funzioni $F(x)$ *ed* $f'(x)$ *sono infinitesime dello stesso ordine.*

Infatti: $\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ ed inoltre $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{f'(x)}$ è finito e diverso da zero.

Con la collaborazione di Angela Santamaria