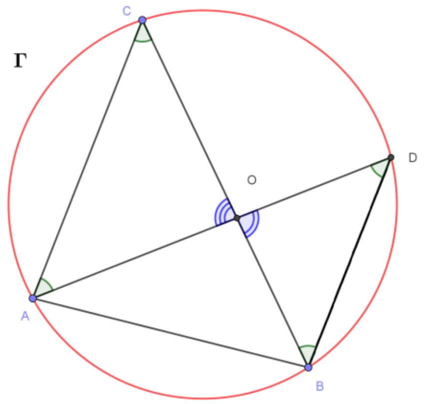
LICEO SCIENTIFICO STRAORDINARIA 2024 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

Sia data una circonferenza Γ e siano $A\hat{C}B$ e $A\hat{D}B$ angoli alla circonferenza che insistono sull'arco AB, con AC parallelo a DB. Detto O il punto di intersezione di BC e AD, dimostrare che i triangoli ACO e BOD sono isosceli e simili fra di loro.



I due triangoli *ACO e BOD* sono simili poiché hanno tutti gli angoli congruenti. Infatti:

- $A\hat{C}B \cong A\hat{D}B$ perché insistono sullo stesso arco AB
- $C\hat{O}A \cong D\hat{O}B$ perché opposti al vertice
- $C\hat{A}O \cong D\hat{B}O$ perché insistono sullo stesso arco CD.

Essendo le rette AC e DB parallele, l'angolo $A\hat{C}B$ è congruente all'angolo $D\hat{B}O$
perché alterni interni rispetto alla trasversale BC.
Analogamente l'angolo $C\hat{A}O$ è congruente all'angolo $A\hat{D}B$ perché alterni interni rispetto alla trasversale AD.

Pertanto i triangoli ACO e BOD sono isosceli rispettivamente sulla base AC e BD.

QUESITO 2

Lanciando due dadi regolari a sei facce, qual è la probabilità di:
- ottenere somma 10;
- ottenere per somma un numero multiplo di 2 o di 3;
- ottenere per somma un numero multiplo di 2 e di 3.

Le coppie possibili nel lancio di due dadi sono 36 (numero di casi possibili).

La somma 10 si ottiene con le seguenti coppie: (4,6), (6,4), (5,5): quindi 3 casi favorevoli.

La probabilità di ottenere somma 10 è quindi $p = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \cong 0.083 \cong 8.3\ \%$

Le somme che si possono ottenere nel lancio di due dadi sono: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Di queste somme i multipli di 2 o di 3 sono: 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12.

Coppie con somma 2: (1,1) **1 caso favorevole**
Coppie con somma 3: (1,2), (2,1) **2 casi favorevoli**
Coppie con somma 4: (1,3), (2,2), (3,1) **3 casi favorevoli**
Coppie con somma 6: (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) **5 casi favorevoli**
Coppie con somma 8: (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) **5 casi favorevoli**
Coppie con somma 9: (3,6), (4,5), (5,4), (6,3) **4 casi favorevoli**
Coppie con somma 10: (4,6), (6,4), (5,5) **3 casi favorevoli.**
Coppie con somma 12: (6,6) **1 casi favorevoli.**

Quindi i casi favorevoli sono 1+2+3+5+4+3+5=24.

La probabilità di ottenere per somma un multiplo di 2 o di 3 è quindi $p = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \cong 0.667 \cong 66.7\ \%$

N.B La probabilità richiesta poteva anche essere calcolata più velocemente come

$$1 - p(somma\ 5) - p(somma\ 7) - p(somma\ 11)$$

Coppie con somma 5: (1,4), (2,3), (3,2), (4,1): **4 casi favorevoli**
Coppie con somma 7: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1): **6 casi favorevoli**
Coppie con somma 11: (5,6), (6,5): **2 casi favorevoli**

Quindi:

La probabilità di ottenere per somma un multiplo di 2 o di 3 è quindi

$$p = 1 - \frac{4}{36} - \frac{6}{36} - \frac{2}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \cong 0.667 \cong 66.7\ \%$$

Le somme che sono multiple di 2 e di 3 sono: 6 e 12, quindi 5+1=6 casi favorevoli.

La probabilità di ottenere per somma un multiplo di 2 e di 3 è quindi $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \cong 0.167 \cong 16.7\ \%$

QUESITO 3

Il centro di una superficie sferica S è il punto di intersezione tra la retta r individuata dalle equazioni

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

e la retta t passante per i punti $A(-2{,}3{,}0)$*e* $B(2,-1{,}2)$. *La superficie S è inoltre tangente al piano α di equazione* $4x - 2y - 4z + 1 = 0$. *Qual è l'equazione di S?*

Il vettore della retta AB è dato da $\vec{v_r} = (2+2, -1-3, 2-0) = (4, -4, 2)$. Le equazioni parametriche della retta AB sono quindi:

AB: $\begin{cases} x = -2+4k \\ y = 3-4k \\ z = 2k \end{cases}$

L'intersezione fra le rette r e t si ottengono risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x = -2+4k \\ y = 3-4k \\ z = 2k \\ x+y-2z=0 \\ 3x+2y-1=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = -2+4k \\ y = 3-4k \\ z = 2k \\ -2+4k+3-4k-4k=0;\ k=\frac{1}{4}; \\ -6+12k+6-8k-1=0;\ k=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Sostituendo questo $k = \frac{1}{4}$ nelle equazioni della retta t otteniamo:

$$x = -2+1 = -1;\ \ y = 3-1 = 2;\ \ z = \frac{1}{2}$$

Il centro C della sfera ha quindi coordinate: $C = \left(-1; 2; \frac{1}{2}\right)$.

Essendo la sfera tangente al piano α di equazione $4x-2y-4z+1=0$, il suo raggio R è uguale alla distanza di C da tale piano:

$$R = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|-4-4-2+1|}{\sqrt{16+4+16}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = R$$

La sfera richiesta ha quindi equazione:

$$(x+1)^2+(y-2)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y-z+3=0$$

QUESITO 4

Determinare il valore del parametro reale $k > 1$ *in modo che il valor medio della funzione*

$$f(x) = \ln(x^3) + \frac{3x-3}{x}$$

sull'intervallo $[1, k]$ *sia uguale a* $1 - \ln\left(\frac{5}{2}\right)$.

Il valor medio di $f(x)$ in $[a; b]$ è dato da:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Nel nostro caso (osserviamo che, per il dominio della funzione, deve essere $x>0$):

$$f(c)=\frac{1}{k-1}\int_1^k\left[\ln(x^3)+\frac{3x-3}{x}\right]dx=\frac{1}{k-1}\int_1^k\left[3\ln(x)+\frac{3x-3}{x}\right]dx=$$

$$=\frac{3}{k-1}\int_1^k\left[\ln(x)+\frac{x-1}{x}\right]dx=\frac{3}{k-1}\int_1^k\left[\ln(x)+1-\frac{1}{x}\right]dx=$$

Cerchiamo una primitiva di $\ln x$ integrando per parti:

$$\int \ln x\,dx=\int(\ln x)(1)\,dx=\int(\ln x)(x)'\,dx=x\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx=x\ln x-x+c$$

Pertanto:

$$f(c)=\cdots=\frac{3}{k-1}[x\ln x-x+x-\ln x]_1^k=\frac{3}{k-1}[(x-1)\ln x]_1^k=\frac{3}{k-1}[(k-1)\ln k-0]$$

Deve essere quindi:

$$\frac{3}{k-1}[(k-1)\ln k]=1-\ln\left(\frac{5}{2}\right);\;\; 3\ln k=1-\ln\left(\frac{5}{2}\right),\qquad k^3=e^{1-\ln\left(\frac{5}{2}\right)},$$

$$k=\sqrt[3]{e^{1-\ln\left(\frac{5}{2}\right)}}=e^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{2}\right)}$$

QUESITO 5

Individuare e classificare i punti in cui la funzione $f(x)=|x-1|+\sqrt[3]{x^3+x^2}$ è continua ma non derivabile.

La funzione è definita e continua su tutto R.
Studiamo la derivabilità.

$$f(x)=\begin{cases} x-1+\sqrt[3]{x^3+x^2} & ,se\;\; x\geq 1\\ -x+1+\sqrt[3]{x^3+x^2} & ,\quad se\;\; x<1\end{cases}$$

Risulta:

$$f'(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}, & se\;\; x>1\\ -1+\dfrac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}, & se\;\; x<1\end{cases}$$

La funzione non è derivabile se $(x^3+x^2)^2=0,\ quindi\ per\ x=0\ e\ x=-1$ poiché:

$$\lim_{x\to0^\pm}f'(x)=\lim_{x\to0^\pm}\left(-1+\frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}\right)=\lim_{x\to0}\left(-1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)=\lim_{x\to0}\left(-1+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to -1} f'(x) = \lim_{x\to -1}\left(-1+\frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}\right) = \left[-1+\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

Non è derivabile anche per $x = 1$, essendo:

$$f'_+(1) = 1+\frac{5}{3\sqrt[3]{4}} \;\; e \;\; f'_-(1) = -1+\frac{5}{3\sqrt[3]{4}}$$

Quindi la funzione è continua su tutto R ma non è derivabile nei punti $x = 0,\; x = 1,\; x = -1$

$$in\ particolare\ x = 0\ \text{è}\ un\ punto\ di\ cuspide, \qquad x = -1\ \text{è}\ un\ punto\ di\ flesso\ a\ tangente\ verticale\ ed\ x = 1\ \text{è}\ un\ punto\ angoloso$$

QUESITO 6

Determinare l'equazione di una funzione polinomiale di primo grado $y = f(x)$ tale che

i) $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$

ii) $\int_1^2 f(x)\,dx = 2$

La generica funzione polinomiale di primo grado ha equazione del tipo: $f(x) = ax+b$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1, \qquad quindi: \int_0^1 (ax+b)\,dx = \left[\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_0^1 = \frac{1}{2}a+b = 1$$

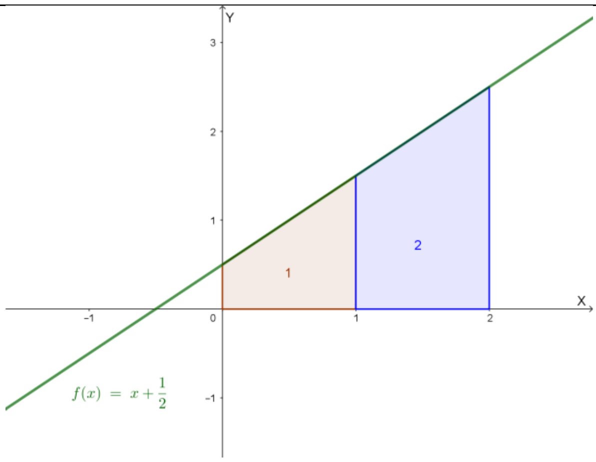
$$\int_1^2 f(x)\,dx = 2, \qquad quindi: \left[\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_1^2 = 2a+2b-\left(\frac{1}{2}a+b\right) = \frac{3}{2}a+b = 2$$

Deve quindi essere soddisfatto il seguente sistema:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}a+b = 1\\ \frac{3}{2}a+b = 2\end{cases};\; \begin{cases}a+2b = 2\\ 3a+2b = 4\end{cases};\; \begin{cases}a = 1\\ b = \frac{1}{2}\end{cases}$$

La funzione richiesta ha quindi equazione: $f(x) = x+\frac{1}{2}$.

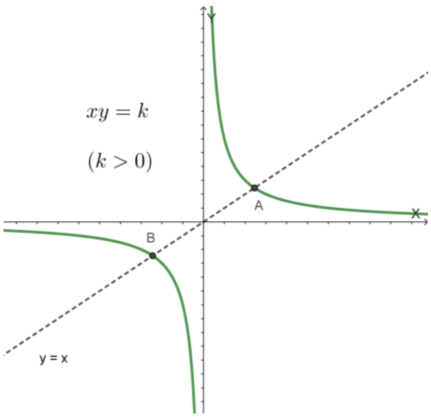
In figura il grafico della funzione ed il significato geometrico dei due integrali:



QUESITO 7

In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, l'equazione $xy = k$, con k parametro reale non nullo, rappresenta un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti. Si dimostri che le rette tangenti nei suoi vertici sono perpendicolari alle bisettrici dei quadranti del sistema di riferimento considerato.

Analizziamo il caso in cui $k > 0$. Il grafico è del tipo:



Ricordiamo che i vertici sono le intersezioni con l'asse trasverso ($y = x$) ed hanno coordinate:

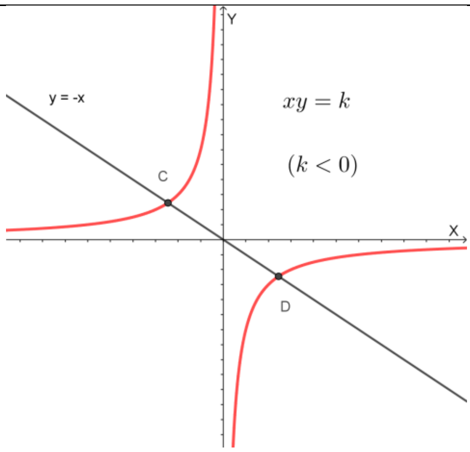
$$A = \left(\sqrt{k}, \sqrt{k}\right), \qquad B = \left(-\sqrt{k}, -\sqrt{k}\right)$$

L'iperbole può essere scritta nella forma: $y = \frac{k}{x}$. Per trovare le tangenti in A e B usiamo il metodo delle derivate.

$$y' = -\frac{k}{x^2} \; ; \; y'\left(\sqrt{k}\right) = y'\left(-\sqrt{k}\right) = -\frac{k}{k} = -1.$$

Le tangenti nei vertici hanno quindi coefficiente angolare uguale a -1, quindi sono perpendicolari alla bisettrice degli assi $y = x$.

Se $k < 0$ il grafico è del tipo:



I vertici sono in questo caso le intersezioni con la retta di equazione $y = -x$ ed hanno coordinate:

$$C = \left(-\sqrt{-k}, \sqrt{-k}\right) \quad e \quad D = \left(\sqrt{-k}, -\sqrt{-k}\right)$$

Risulta:

$$y' = -\frac{k}{x^2} \; ; \; y'\left(-\sqrt{-k}\right) = y'\left(\sqrt{-k}\right) = -\frac{k}{-k} = 1.$$

Le tangenti nei vertici hanno quindi coefficiente angolare uguale a 1, quindi sono perpendicolari alla bisettrice degli assi $y = -x$.

QUESITO 8

Scrive Paolo Giordano ne "La solitudine dei numeri primi": «I numeri primi sono divisibili soltanto per 1 e per sé stessi. Se ne stanno al loro posto nell'infinita serie dei numeri naturali, schiacciati come tutti fra due, ma un passo in là rispetto agli altri».
Si considerino la funzione $f(x) = x^p$ e la sua derivata $(p-1)-esima$ $f^{(p-1)}$. Si può dimostrare che, se p è un numero primo, allora p divide $f^{(p-1)}$+1. Verificare la correttezza di tale affermazione per tutti i numeri primi minori di 10.

Posto $f(x) = x^p$, la sua derivata prima è $f'(x) = px^{p-1}$.

Il primo numero primo è $p = 2$. In tal caso $f(x) = x^2$, la derivata $(p-1)-esima$ corrisponde alla derivata prima, che è $f'(x) = 2x$. Risulta $f^{(p-1)} + 1 = f'(x) + 1 = 2x + 1$: CHE NON E' DIVISIBILE PER 2.

Se $p = 3$, $f(x) = x^3$, la derivata $(p-1)-esima$ corrisponde alla derivata seconda, che è $f''(x) = 3(2x)$. Risulta $f^{(p-1)} + 1 = f''(x) + 1 = 6x + 1$: CHE NON E' DIVISIBILE PER 3.

La derivata di ordine $(p-1)$ è data da:

$$f^{(p-1)}(x) = \underbrace{p(p-1)\ldots(2)}_{p-1\ termini} x^{p-(p-1)} = p!\,x$$

Quindi: $f^{(p-1)} + 1 = p!\,x + 1$, CHE NON è MAI DIVISIBILE PER p.
L'AFFERMAZIONE "*Si può dimostrare che, se p è un numero primo, allora p divide* $f^{(p-1)}+1$".
È QUINDI FALSA.
Il testo quindi contiene qualche errore. Siccome la falsità dell'affermazione non dipende dal fatto che p sia primo ci siamo chiesti quale parte del testo fosse errata. L'idea ci è venuta pensando che se $f^{(p-1)}(x)$ fosse $(p-1)!$ allora $f^{(p-1)}(x)+1$ sarebbe uguale a $(p-1)!+1$. Questa quantità fa venire in mente un Teorema di Teoria dei numeri (teorema di Wilson) da cui si deduce che se p è un numero primo allora $(p-1)!+1$ è divisibile per p (e vale anche il viceversa).

Affinché sia $f^{(p-1)}(x) = (p-1)!$, la funzione $f(x)$ deve essere $\boldsymbol{f(x) = x^{p-1}}$.

Verifichiamo con questa funzione quanto richiesto (dobbiamo analizzare i numeri primi inferiori a 10, quindi $p = 2,3,5,7$).

1) Il primo numero primo è $p = 2$. In tal caso $f(x) = x$, la derivata $(p-1)-esima$ corrisponde alla derivata prima, che è $f'(x) = 1$. Risulta $f^{(p-1)} + 1 = f'(x) + 1 = 1 + 1 = 2$: che è divisibile per $p = 2$.

2) Se $p = 3$: $f(x) = x^{p-1} = x^2$, la derivata $(p-1)-esima$ corrisponde alla derivata seconda, che è $f''(x) = 2$. Risulta $f^{(p-1)} + 1 = f''(x) + 1 = 2 + 1 = 3$: che è divisibile per $p = 3$.

3) Se $p = 5$: $f(x) = x^{p-1} = x^4$, la derivata $(p-1)-esima$ corrisponde alla derivata quarta, che è $f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$. Risulta $f^{(p-1)} + 1 = f^{(4)}(x) + 1 = 4! + 1 = 25$: che è divisibile per $p = 5$.

4) Infine, se $p = 7$: $f(x) = x^{p-1} = x^6$, la derivata $(p-1)-esima$ corrisponde alla derivata 6, che è $f^{(6)}(x) = 6!$ Risulta $f^{(p-1)} + 1 = f^{(6)}(x) + 1 = 6! + 1 = 721$: che è divisibile per $p = 7$ $(721 : 7 = 103)$.

Ribadiamo che, in generale, se $f(x) = x^{p-1}$ la derivata di ordine $p-1$ è $f^{(p-1)}(x) = (p-1)!$ Quindi

$$f^{(p-1)}(x) + 1 = (p-1)! + 1$$

Per una dimostrazione del Teorema di Wilson si può consultare il seguente interessante articolo:

https://dainoequinoziale.it/resources/scienze/matematica/Wilson1.pdf

Nota finale
A parte l'errore nella formulazione del testo (di cui noi abbiamo proposto una possibile variante) è evidente che l'argomento difficilmente è alla portata di uno studente di liceo. Anche se, a dire il vero, era richiesta solo la verifica della proprietà per alcuni valori di p (i numeri primi inferiori a 10) e, come abbiamo visto, questa verifica è semplice.

Con la collaborazione di Angela Santamaria