MAURIZIO CASTELLAN

PROBLEMA NOVEMBRE 2004

Dimostrare che l'intervallo aperto di numeri reali (0;1) è equipotente all'intervallo chiuso di numeri reali [0;1].

SOLUZIONE

Sia a un numero reale tale che $0 < a < 1$, allora per ogni $n, m \in \mathbb{N}$: $n < m$ sse $a^m < a^n$

Indicato ora con S il sottoinsieme di $(0, 1]$: $S = \{ a^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

consideriamo la funzione $f : [0, 1] \to (0, 1)$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x = 0 \\ a^2 x & \text{se } x \in S \\ x & \text{se } x \in (0,1] / S \end{cases}$$

Proveremo che f è biettiva.

F È INIETTIVA.

Siano x_1 e $x_2 \in [0, 1]$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$:

<u>1° caso: x_1 (oppure x_2) $\in S$</u>, cioè $x_1 = a^{\underline{n}}$ per qualche $\underline{n} \in \mathbb{N}$. In questo caso anche $x_2 \in S$, altrimenti

o $x_2 = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(a^{\underline{n}}) = a^{\underline{n}+2}$ e $f(x_2) = f(0) = a \Rightarrow a^{\underline{n}+2} = a$ (assurdo!) ;
oppure $x_2 \in (0, 1] / S \Rightarrow f(x_1) = f(a^{\underline{n}}) = a^{\underline{n}+2}$ e $f(x_2) = x_2 \Rightarrow a^{\underline{n}+2} = x_2 \in S$ (assurdo!) ;

ne segue che $x_2 = a^{\underline{m}}$ per qualche $\underline{m} \in \mathbb{N}$. Possiamo allora scrivere:

$f(x_1) = f(a^{\underline{n}}) = a^{\underline{n}+2}$ e $f(x_2) = f(a^{\underline{m}}) = a^{\underline{m}+2} \Rightarrow a^{\underline{n}+2} = a^{\underline{m}+2} \Rightarrow a^{\underline{n}} = a^{\underline{m}} \Rightarrow x_1 = x_2$

<u>2° caso: x_1 e $x_2 \in [0, 1] / S$</u>.

sottocaso a): $x_1 = 0$ (oppure $x_2 = 0$). In questo caso anche $x_2 = 0$, altrimenti

$x_2 \in (0, 1] / S \Rightarrow f(x_1) = f(0) = a$ e $f(x_2) = x_2 \Rightarrow a = x_2 \in S$ (assurdo!)

sottocaso b): $x_1 , x_2 \in (0, 1] / S$. Si ha che $f(x_1) = x_1$ e $f(x_2) = x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

F È SURIETTIVA.

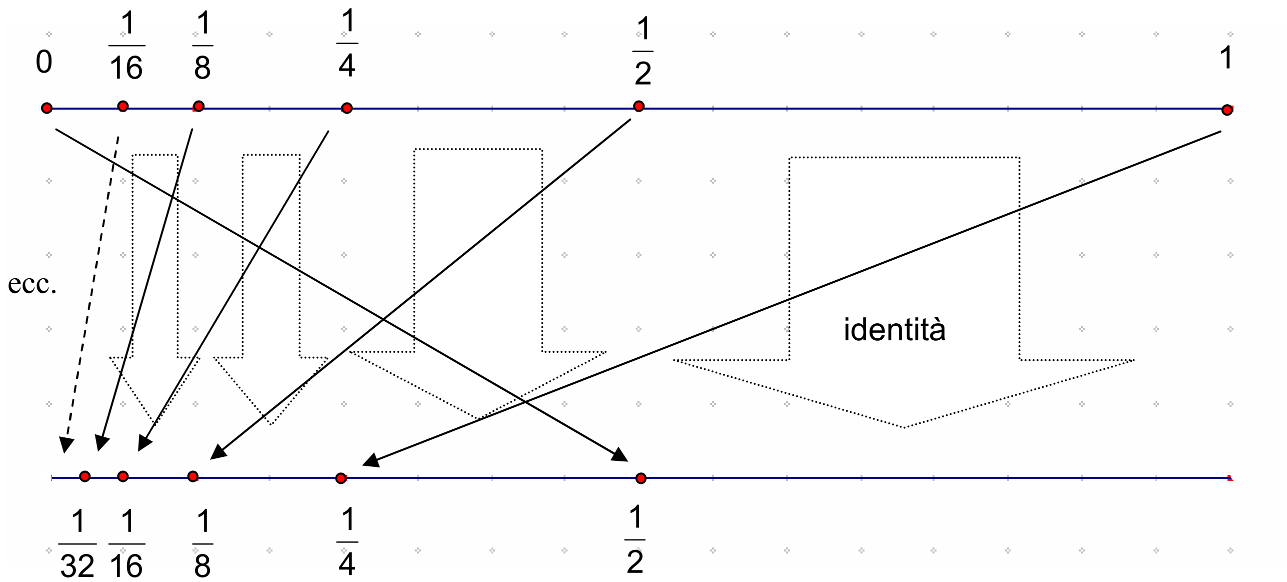
1° caso: $y \in S / \{1\}$: cioè $y = a^{\underline{n}}$ per qualche $\underline{n} \in \mathbb{N}$ con $\underline{n} > 0$.

sottocaso a): $\underline{n} = 1 \Rightarrow y = a$ ed esiste $x = 0 \in [0, 1]$ tale che $f(x) = f(0) = a = y$

sottocaso b): $\underline{n} > 1 \Rightarrow$ esiste $x = a^{\underline{n}-2} \in [0, 1]$ tale che $f(x) = f(a^{\underline{n}-2}) = a^{\underline{n}} = y$

2° caso: $y \in (0, 1)/ (S/\{1\})$: esiste $x = y \in [0, 1] \Rightarrow f(x) = x = y$.

Esempio: se si sceglie $a = \frac{1}{2}$ la funzione biettiva può essere visualizzata nel seguente modo.



Osserviamo che la funzione f è discontinua in tutti i valori dell'insieme S.